Böschungsstrahlen und Böschungsflächen.

Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde der hohen philosophischen Fakultät der vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg

vorgelegt von

Rudolf Ackermann
aus Adlershof bei Berlin.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Halle a. d. S. — 1913.
Hofbuchdruckerei von
C. A. Kaemmerer & Co.

Referent: Professor Dr. **A. Gutzmer.**

Dem Andenken meines Vaters!

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544701_0061

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 9

I. System der Böschungsstrahlen 13

§ 1. Böschungsstrahlen 13

§ 2. Formeln für das Strahlensystem . . . 15

§ 3. Grenzpunkte, Hauptflächen 19

§ 4. Abwickelbare Flächen, Brennpunkte . . 23

§ 5. Brennflächen 25

§ 6. Kummers Fundamentalgrössen 26

II. Spezielle Systeme von Böschungsstrahlen . . . 32

§ 7. Das Normalensystem 32

§ 8. Das parabolische Strahlensystem . . . 36

§ 9. Böschungsstrahlensysteme von Flächen, deren Niveaulinien Asymptotenlinien sind 42

§ 10. Strahlensystem von Minimalflächen . . 50

III. Böschungsflächen von Flächen 2. Grades . . . 56

§ 11. Ellipsoid 56

§ 12. Das einschalige Hyperboloid 61

§ 13. Das zweischalige Hyperboloid 64

§ 14. Das elliptische Paraboloid 68

Bezeichnungen.

x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten des Flächenpunktes,
p, q, r, s, t partielle Ableitungen bei Flächendarstellung $z = f(x, y)$,
u, v Parameter bei Parameterdarstellung; als Indizes bedeuten sie partielle Ableitungen,
a, b, c Richtungscosinus der Flächennormale,
E, F, G Fundamentalgrössen 1. Ordnung,
$D^2 = EG - F^2$
L, M, N Fundamentalgrössen 2. Ordnung,
K Krümmungsmass,
H mittlere Krümmung,
X, Y, Z Richtungscosinus der Böschungsstrahlen,
dp_0 der kürzeste Abstand zweier benachbarter Strahlen,
l, m, n Richtungscosinus dieses Abstandes,
t_0 die Entfernung eines beliebigen Punktes von dem zu dem Strahl gehörigen Punkt der Leitfläche,
r_0, r_1, r_2 Grenzpunkte,
$\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2$ Abszissen der Brennpunkte,
$E_0, F_0, G_0, D_0, D', D_1', D''$ Kummers Fundamentalgrössen,
ξ, η, ζ Koordinaten des Strahlensystems (Böschungsfläche, 2. Brennfläche etc.).

Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit, zu der ich die Anregung von meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Gutzmer, im Verein mit Herrn Professor Dr. Salkowski erhalten habe, beschäftige ich mich mit Böschungsflächen und zwar mit solchen, die eine gegebene Fläche berühren. Allgemein ist eine Böschungsfläche eine abwickelbare Fläche, deren ∞^1 Berührungsebenen konstante Neigung zur Horizontalebene besitzen. Da die Erzeugenden der Böschungsfläche alle gleich geneigt sind gegen diese Ebene, die wir in dem Koordinatensystem als xy-Ebene annehmen wollen, so sind sie Tangenten einer allgemeinen Schraubenlinie. Jede zur Horizontalebene parallele Ebene schneidet die Böschungsfläche in einer Evolvente des Normalschnittes desjenigen Zylinders, auf dem die Schraubenlinie geodätisch ist. Offenbar besitzen die Böschungsflächen als Richtkegel einen Rotationskegel.[1]) Ihre Erzeugenden und deren Horizontalprojektionen sind Normalen jeder Horizontalspur der Fläche, sie werden von der Evolute eingehüllt.

Zur Bestimmung der Böschungsfläche kann eine Kurve[2]) als Leitkurve gegeben sein oder eine Fläche, die von ihr

1) Wiener: Lehrbuch der darstellenden Geometrie II. Leipzig 1887. Seite 387. Die Böschungsfläche heisst dort Fläche von gleichförmiger Neigung.

2) La Gournerie: Traité de Géométrie descriptive. Bd. 2. 3. Kapitel. Er behandelt dort Böschungsflächen längs Kegelschnitten, deren eine Achse Fallinie in der Ebene des Kegelschnittes ist.

berührt wird. Mit letzterem Problem will ich mich befassen, wie ich schon zu Anfang bemerkte.

Offensichtlich berührt eine Böschungsfläche einer gegebenen Fläche diese in Punkten, in denen die Flächennormalen ein und denselben Winkel mit der z-Achse bilden. Solche Flächennormalen werden in der Literatur als isokline Normalen[1]) bezeichnet. Lässt man einen Strahlenbündel parallel der z-Achse auf die Fläche fallen, so ergeben die Berührungskurven Punkte gleicher Helligkeit; sie sind daher identisch mit den Lichtgleichen oder Isophoten bei Parallelbeleuchtung der Fläche. Ihr sphärisches Bild ist auf der Einheitskugel ein horizontaler Kreis. Grösste Kreise entsprechen den Lichtgrenzen.[2]) Diese letzteren werden neuerdings von Neuendorff[3]) behandelt, der sie als Hauptkreiskurven bezeichnet.

Betrachtet man sämtliche ∞^1 Böschungsflächen einer gegebenen Fläche — hinsichtlich einer Ebene, der Horizontalebene — so bilden ihre ∞^2 Erzeugenden ein Strahlensystem. Im ersten Teile wird dies untersucht, ich finde die Grenzpunkte und Brennpunkte und stelle die Gleichungen für die 2. Brennfläche, der Hauptflächen und abwickelbaren Flächen des Systems auf. Charakteristisch für diese Kongruenz ist, dass die eine Brennfläche von den abwickelbaren Flächen in Isophoten und Fallinien geschnitten wird. Andrerseits folgt

---

1) Schlömilch: Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. 5. Aufl. Leipzig 1904. S. 190.

2) Burmester: Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmässig gestalteter Flächen. Leipzig 1875. Er stellt für die Lichtgrenzen die Gleichung auf:

$$\Sigma \cos v_x \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

wo v_x, v_y, v_z die Richtung des einfallenden Lichtbündels anzeigt.

3) Neuendorff: Über die Kurven auf einer Fläche, deren sphärische Bilder grösste Kreise sind. Crelles Journal f. reine und angewandte Mathematik. Bd. 140. 1911.

daraus, dass diese beiden Kurvenscharen konjugiert sind. Hierfür werden unabhängig vom Strahlensystem noch zwei weitere Beweise, ein geometrischer und ein analytischer, erbracht.

Der 2. Teil handelt von speziellen Strahlensystemen. Im ersten Paragraphen wird auf die Mongeschen Gesimsflächen näher eingegangen; für diese geht das System über in ein Normalensystem. Gleichzeitig sieht man, dass auf einer Fläche die Isophoten und Fallinien Krümmungslinien sind, sobald die ersteren mit den Niveaulinien zusammenfallen. Im folgenden Paragraphen wird die parabolische Kongruenz untersucht, im nächsten ein W-System. Bei diesem gehe ich von Flächen aus, deren Asymptotenlinien Niveaulinien sind. Einerseits ergibt sich, dass die Asymptotenlinien notwendig gerade Linien sein müssen, andrerseits ist die 2. Brennfläche von gleicher Beschaffenheit wie die erste. Der letzte Paragraph dieses Abschnitts ist den Minimalflächen gewidmet, deren Böschungsfläche und zweite Brennfläche sich ebenfalls explizite darstellen lassen.

Der 3. Teil ist der Untersuchung von Böschungsflächen an Flächen 2. Grades und zwar hauptsächlich an Mittelpunktsflächen gewidmet. Für letztere ergibt sich unter anderen die Beziehung, dass die Böschungsflächen von der xy-Ebene in konfokalen Kegelschnitten geschnitten werden. Dies gilt jedoch nur bei der dort gewählten Lage der Fläche. Als ein weiteres Ergebnis fand ich, dass die Schnitte der xy-Ebene mit der Böschungsfläche, mit der gegebenen Fläche und mit dem Zylinder, auf dem die Gratlinie der Böschungsfläche geodätisch ist, Kegelschnitte sind, für die die entsprechenden Halbachsen in einem bestimmten Verhältnis stehen. Es sind nämlich die Halbachsen des zu zweit erhaltenen Schnittes mittlere Proportionale zu denen der beiden anderen. Diese Beziehung gilt auch für das Paraboloid. Bei den Hyperboloiden ergibt sich ferner eine interessante Ausartung der Böschungsfläche in zwei Doppelkegel, deren Spitzen sich bei dem einschaligen Hyperboloid in den Brenn-

punkten der Kehlellipse befinden und bei denen der Tangens des Öffnungswinkels gleich dem Verhältnis der kleinen Halbachse der Kehlellipse zu der dritten Halbachse ist. Diese beiden Kegel berühren die Fläche in Hyperbeln, deren Ebenen in den Leitlinien der Kehlellipse auf der xy-Ebene senkrecht stehen. Entsprechendes gilt für das zweischalige Hyperboloid.

I. Kapitel.

System der Böschungsstrahlen.

§ 1. Böschungsstrahlen.

Werden aus der Gesamtheit der ∞^2 Tangentenebenen einer Fläche diejenigen mit der gleichen Neigung α gegen die xy-Ebene ausgewählt, so umhüllen diese die Böschungsfläche B_α. Als abwickelbare Fläche besitzt sie ∞^1 Erzeugende, deren jede denselben Winkel $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ mit der z-Achse bildet. Ändern wir den Böschungswinkel α, so erhalten wir andere und andere Böschungsflächen, im Ganzen ∞^1, wenn der Böschungswinkel alle Werte zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ annimmt. Wir erhalten demnach ∞^2 Erzeugende, die wir Böschungsstrahlen nennen wollen. Als Schnitt zweier unendlich benachbarten Tangentenebenen, die gleiche Neigung gegen die xy-Ebene besitzen, bilden die Böschungsstrahlen mit der z-Achse Winkel, die den zugehörigen Böschungswinkel zu einem Rechten ergänzen. Da sie ausserdem senkrecht auf den Flächennormalen stehen, so lassen sich ihre Richtungscosinus (X, Y, Z) durch die der Flächennormalen (a, b, c) ausdrücken. Wir erhalten:

$$Z = -\sqrt{1 - c^2}. \tag{1.}$$

Ferner bestehen folgende Relationen:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$
$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$
$$aX + bY + cZ = 0,$$

die mit Rücksicht auf (1.) in:

$$X^2 + Y^2 = c^2, \tag{2.}$$
$$aX + bY = c\sqrt{1 - c^2} \tag{3.}$$

übergehen. Aus der letzten Gleichung folgt:

$$Y = \frac{c\sqrt{1 - c^2} - aX}{b}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in Gleichung (2.) ein, so ergibt sich:

$$X^2 b^2 + c^2 (1 - c^2) - 2\, a\, X\, c\sqrt{1 - c^2} + a^2 X^2 = b^2 c^2.$$

Da nun einerseits $a^2 + b^2 = 1 - c^2$, andrerseits $1 - c^2 - b^2 = a^2$ ist, so folgt:

$$X^2 (1 - c^2) - 2\, a\, X\, c\sqrt{1 - c^2} + a^2 c^2 = 0,$$

$$X = \frac{a\, c}{\sqrt{1 - c^2}}.$$

Ebenso ist:

$$Y = \frac{b\, c}{\sqrt{1 - c^2}}.$$

Setzen wir:

$$\frac{1 - c^2}{c^2} = \varepsilon^2, \tag{4.}$$

sodass ε alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annimmt, wenn c die Werte von -1 bis $+1$ durchläuft, so gehen X, Y, Z über in:

$$X = \frac{a}{\varepsilon};\quad Y = \frac{b}{\varepsilon};\quad Z = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + 1}}. \tag{5.}$$

Vergleichen wir die Gleichungen der Flächennormale eines Punktes

$$\frac{\xi - x}{a} = \frac{\eta - y}{b} = \frac{\zeta - z}{c}$$

mit denen des zugehörigen Böschungsstrahles

$$\frac{\xi_1 - x}{X} = \frac{\eta_1 - y}{Y} = \frac{\zeta_1 - z}{Z},$$

für die wir nach (5.) schreiben können

$$\frac{\xi_1 - x}{a} = \frac{\eta_1 - y}{b} = (\zeta_1 - z)\frac{\sqrt{\varepsilon^2+1}}{-\varepsilon^2},$$

so sehen wir, das die projizierenden Ebenen beider auf die xy-Ebene zusammenfallen. Ein Böschungsstrahl ist daher definiert als Schnitt der projizierenden Ebene der Flächennormale auf die Horizontalebene mit der zugehörigen Tangentialebene.

§ 2. Formeln für das Strahlensystem bei Zugrundelegung der Flächengleichung $z = f(x, y)$.

Sind p, q, r, s, t die partiellen Ableitungen von z, so stellen sich die Richtungscosinus der Flächennormalen dar durch:

$$a = \frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}; \quad b = \frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}; \quad c = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}} \tag{1.}$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich in Hinsicht auf § 1, Gleichung (4.)

$$p^2 + q^2 = \varepsilon^2. \tag{2.}$$

Diese Gleichung definiert auf der gegebenen Fläche die Isophoten (s. Einleitung). Durch Differentiation geht sie über in:

$$p\,dp + q\,dq = 0, \tag{3.}$$

oder da

$$dp = r\,dx + s\,dy; \quad dq = s\,dx + t\,dy, \tag{4.}$$

$$(pr + qs)\,dx + (ps + qt)\,dy = 0. \tag{5.}$$

Dies ist also die Differentialgleichung der Isophoten.

Die Richtungscosinus der Böschungsstrahlen sind demnach (§ 1, 5):

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{p}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2+1}}, \\ Y &= -\frac{q}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2+1}}, \\ Z &= -\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+1}}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.)$$

Die Schar der ∞^2 Böschungsstrahlen bildet ein Strahlensystem, zu dem also alle Tangenten einer Fläche gehören, die mit der zugehörigen Flächennormale in einer zur Horizontalebene senkrechten Ebene liegen. Sind ξ, η, ζ die Koordinaten eines Punktes P auf dem durch den Punkt (X, Y, Z) der gegebenen Fläche hindurchgehenden Strahle, t_0 die Entfernung des Punktes P vom Punkte (X, Y, Z), so sind

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x + t_0 X, \\ \eta &= y + t_0 Y, \\ \zeta &= z + t_0 Z, \end{aligned}\right\} \qquad (7.)$$

die Gleichungen des Strahlensystems.

Es seien ferner:

dp_0 der kürzeste Abstand zweier unendlich benachbarter Strahlen,

l, m, n seine Richtungscosinus,

r_0 der Wert der Abszisse t_0 im Fusspunkt von dp_0 auf dem Strahle.

Die Gleichungen (7.) können geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - \frac{t_0 p}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2+1}}, \\ \eta &= y - \frac{t_0 q}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2+1}}, \\ \zeta &= z - \frac{t_0 \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+1}}. \end{aligned}\right\} \qquad (8.)$$

Zur Berechnung von r_0, l, m, n, dp_0 differenzieren wir X, Y, Z partiell nach x und y:

$$dX = \frac{1}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\Big\{[p^2(p^2+q^2+1) + p^2(p^2+q^2) - (p^2+q^2)(p^2+q^2+1)]\,dp + pq(2p^2+2q^2+1)\,dq\Big\},$$

$$dX = \frac{(p^4-q^4-q^2)\,dp + pq(2p^2+2q^2+1)\,dq}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ebenso ergibt sich:

$$dY = \frac{(q^4-p^4-p^2)\,dq + pq(2p^2+2q^2+1)\,dp}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$dZ = -\frac{p\,dp + q\,dq}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Bezeichnen wir mit ds_0 das Linienelement des sphärischen Bildes des Strahlensystems, wobei ds_0 auch den unendlich kleinen Winkel der beiden Nachbarstrahlen bedeutet, so ist:

$$ds_0^2 = \Sigma\,(dX)^2.$$

Setzen wir hierin die oben gefundenen Werte ein, so geht ds_0^2 über in:

$$ds_0^2 = \frac{1}{(\varepsilon^2+1)^3\,\varepsilon^6}\Big\{[(q^4-p^4-p^2)\,dq + pq(2p^2+2q^2+1)\,dp]^2 + [(p^4-q^4-q^2)\,dq + pq(2p^2+2q^2+1)\,dq]^2 + (p\,dp + q\,dq)^2(p^2+q^2)^2\Big\},$$

oder nach leichter Umformung:

$$ds_0^2 = \frac{\varepsilon^4(dp^2+dq^2) + (q\,dp - p\,dq)^2}{(\varepsilon^2+1)^2\,\varepsilon^4}. \qquad (9.)$$

In Hinsicht auf Gleichung (4.) wird:

$$dp^2 + dq^2 = (r^2+s^2)\,dx^2 + 2s(r+t)\,dx\,dy + (s+t^2)\,dy^2$$
$$q\,dp - p\,dq = (qr - ps)\,dx + (qs - pt)\,dy.$$

Mit Rücksicht auf diese Beziehungen geht (9.) über in:

$$d s_0^2 = \frac{1}{(\varepsilon^2+1)\,\varepsilon^4}\Big\{[(r^2+s^2)\,dx^2 + 2\,s\,(r+t)\,dx\,dy + (s^2+t^2)\,dy^2]\,\varepsilon^4 + [(q\,r - p\,s)\,dx + (q\,s - p\,t)\,dy]^2\Big\}.$$

Nun ist:[1])

$$r_0 = -\frac{\Sigma\, dX\,dx}{\Sigma\,(dX)^2},$$

$$\Sigma\, dX\,dx = \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon^2+1)^3}\,\varepsilon^3}\Big\{(p^4 - q^4 - q^2)\,dp\,dx + p\,q\,(\varepsilon\,p^2 + \varepsilon\,q^2 + 1)\,(dq\,dx + dp\,dy) + (q^4 - p^4 - p^2)\,dq\,dy - (p^2+q^2)\,(p\,dp + q\,dq)\,dz\Big\},$$

oder da $dz = p\,dx + q\,dy$ ist, geht dieser Ausdruck schliesslich über in:

$$\Sigma\, dX\,dx = \frac{(q\,dx - p\,dy)\,(p\,dq - q\,dp}{\varepsilon^3\sqrt{\varepsilon^2+1}}.$$

Damit erhält r_0 folgende Form:

$$r_0 = \frac{(q\,dx - p\,dy)\,(q\,dp - p\,dq)\,\varepsilon\,(\varepsilon^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon^4\,(dp^2 + dq^2) + (q\,dp - p\,dq)^2}, \qquad (10.)$$

oder in Hinsicht auf (4.)

$$r_0 = \Big\{(q\,dx - p\,dy)\,[(q\,r - p\,s)\,dx + (q\,s - p\,t)\,dy]\,\varepsilon\,(\varepsilon^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big\} \cdot \frac{1}{\varepsilon^4[(r^2+s^2)dx^2 + 2s(r+t)dxdy + (s^2+t^2)dy^2] + [(qr-ps)dx + (qs-pt)dy]^2} \quad \ldots \quad (11.)$$

Für l, m, n bestehen folgende Relationen:[2])

$$l\,ds_0 = Y\,dZ - Z\,dY$$
$$m\,ds_0 = Z\,dX - X\,dZ$$
$$n\,ds_0 = X\,dY - Y\,dX.$$

---

1) Kommerell: Theorie der Strahlensysteme. Sammlung Schubert LXII Seite 94, 13.

2) desgl. Seite 95, 18.

Setzen wir die Ausdrücke für X, Y, Z, dX, dY, dZ, ein, so folgt:

$$l\,ds_0 = \frac{2pq\,dp + (q^2 - p^2)\,dq}{(\varepsilon^2 + 1)\,\varepsilon^2},$$

$$m\,ds_0 = \frac{(q^2 - p^2)\,dp - 2pq\,dq}{(\varepsilon^2 + 1)\,\varepsilon^2},$$

$$n\,ds_0 = \frac{p\,dq - q\,dp}{(\varepsilon^2 + 1)\,\varepsilon^2}.$$

Der kürzeste Abstand[1]) zweier benachbarter Strahlen berechnet sich nach der Formel:

$$dp_0 = l\,dx + m\,dy + n\,dz,$$

oder

$$dp_0\,ds_0 = l\,ds_0\,dx + m\,ds_0\,dy + n\,ds_0\,dz.$$

Setze man hierin obige Werte ein, so ergibt sich:

$$dp_0\,ds_0 = \frac{pq\,dp\,dx + q^2\,dq\,dx - pq\,dq\,dy - p^2\,dp\,dy}{(\varepsilon^2 + 1)\,\varepsilon^2}$$

$$dp_0\,ds_0 = \frac{(p\,dp + q\,dq)\,(q\,dx - p\,dy)}{(\varepsilon^2 + 1)\,\varepsilon^2}.$$

Setzen wir hierin die Werte für ds_0, dp und dq ein, so folgt:

$$dp_0 = \left\{[(pr + qs)\,dx + (ps + qt)\,dy]\,(q\,dx - p\,dy)\right\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^4[(r^2+s^2)\,dx^2 + 2s(r+t)\,dx\,dy + (s^2+t^2)\,dy^2] + [(qr-ps)\,dx + (qs-pt)\,dy]^2}} \quad \ldots \quad (12.)$$

§ 3. Grenzpunkte, Hauptflächen.

Grenzpunkte eines Strahles sind die Punkte, für die r_0 extreme Werte erreicht. Um diese zu berechnen, betrachten wir in (11.) § 2:

$$r_0\,\varepsilon^4\,[(r^2 + s^2)\,dx^2 + 2s(r + t)\,dx\,dy + (s^2 + t^2)\,dy^2]$$
$$+ r_0\,[(qr - ps)\,dx + (qs - pt)\,dy]^2 =$$
$$(q\,dx - p\,dy)\cdot[(qr - ps)\,dx + (qs - pt)\,dy]\,\varepsilon\,(\varepsilon^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$$

1) desgl. Seite 95, 14.

$dy : dx$ variabel und differenzieren partiell nach ihnen.

Die Differentiation nach dx ergibt:

$$r_0 \Big\{\varepsilon^4 [2\,dx\,(r^2+s^2) + 2\,s\,(r+t)\,dy] + 2\,(qr-ps)^2\,dx$$

$$+ 2\,(qr-ps)\,(qs-pt)\,dy\Big\} = 2\,q\,\varepsilon\,(\varepsilon^2+1)^{\frac{3}{2}}(qr-ps)\,dx$$

$$+ (qs-pt)\,q\,\varepsilon\,(\varepsilon^2+1)^{\frac{3}{2}}\,dy - p\,(qr-ps)\,\varepsilon\,(\varepsilon^2+1)^{\frac{3}{2}}\,dy. \qquad (1.)$$

Hieraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\,q\,\varepsilon\,(\varepsilon^2+1)^{\frac{3}{2}}(qr-ps) - 2\,r_0[\varepsilon^4(r^2+s^2) + (qr-ps)^2]}{2\,r_0[s(r+t)\varepsilon^4 + (qr-ps)(qs-pt)] + [pq(r+t) - \varepsilon^2 s]\,\varepsilon\,(\varepsilon^2+1)^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots (2.)$$

Die Differentiation nach dy ergibt:

$$2\,r_0\,[\varepsilon^4\,(r+t)\,s\,dx + \varepsilon^4\,(s^2+t^2)\,dy + (qr-ps)\,(qs-pt)\,dx$$

$$+ (qs-pt)^2\,dy] = \varepsilon\,(\varepsilon^2+1)^{\frac{3}{2}}\,[\varepsilon^2 s - pq\,(r+t)]\,dx$$

$$- 2\,p\,(qs-pt)\,\varepsilon\,(\varepsilon^2+1)^{\frac{3}{2}}\,dy. \qquad (3.)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{[\varepsilon^2 s - pq(r+t)]\,\varepsilon(\varepsilon^2+1)^{\frac{3}{2}} - 2r_0[\varepsilon^4 s(r+t) + (qr-ps)(qs-pt)}{2r_0[\varepsilon^4(s^2+t^2) + (qs-pt)^2] + 2p(qs-pt)\,\varepsilon(\varepsilon^2+1)^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots (4.)$$

Wird aus den Gleichungen (2.) und (4.) $dy : dx$ eliminiert, so ergibt die in r_0 quadratische Gleichung die beiden extremen Werte von r_0:

$$\Big\{[\varepsilon^2 s - pq\,(r+t)]\,\varepsilon\,(\varepsilon^2+1)^{\frac{3}{2}} - 2\,r_0\,[\varepsilon^4\,s\,(r+t) + (qr-ps)$$

$$\cdot(qs-pt)]\Big\}^2 = \Big\{2\,r_0\,[\varepsilon^4(s^2+t^2) + (qs-pt)^2] + 2\,p\,(qs-pt)\cdot\varepsilon$$

$$(\varepsilon^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big\}\cdot\Big\{2\,r_0\,[\varepsilon^4(r^2+s^2) + (qr-ps)^2] + 2\,q\,(ps-qr)\,\varepsilon\,(\varepsilon^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big\}.$$

Bezeichnen wir den Koeffizienten von r_0^2 mit A, den von r_0 mit B und das absolute Glied mit C, so ist:

$$\frac{A}{4} = \varepsilon^4 (s^2 + t^2)(r^2 + s^2) - \varepsilon^8 (r^2 s^2 + s^2 t^2 + 2 s^2 r t)$$
$$+ \varepsilon^4 (s^2 + t^2)(q r - p s)^2 + \varepsilon^4 (r^2 + s^2)(q s - p t)^2$$
$$- 2 \varepsilon^4 s (r + t)(q r - p s)(q s - p t) + (q s - p t)^2 (q r - p s)^2$$
$$- (q r - p s)^2 (q s - p t)^2$$
$$= \varepsilon^8 (s^2 - r t)^2 + \varepsilon^4 \{[s (q r - p s) - r (q s - p t)]^2$$
$$+ [s (q s - p t) - t (q r - p s)]^2\}$$

$$A = 4 \varepsilon^6 (\varepsilon^2 + 1)(s^2 - r t)^2$$

$$\frac{B}{4} = \varepsilon (\varepsilon^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \{[\varepsilon^4 (s^2 + t^2) + (q s - p t)^2] q (p s - q r)$$
$$+ (q s - p t) p [\varepsilon^4 (r^2 + s^2) + (q r - p s)^2] + [\varepsilon^4 (r + t) s$$
$$+ (q r - p s)(q s - p t)] [\varepsilon^2 s - p q (r + t)]$$
$$= \varepsilon^5 (\varepsilon^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \{(s^2 + t^2) q (p s - q r) + (r^2 + s^2) p (q s - p t)$$
$$+ s (r + t) [\varepsilon^2 s - p q (r + t)]\} + 2 (\varepsilon^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \{(q s - p t)^2$$
$$\cdot (p s - q r) q + (q s - p t)(q r - p s)^2 \cdot p + (q r - p s)(q s - p t)$$
$$\cdot [\varepsilon^2 s - p q (r + t)]\}$$

$$B = 4 \varepsilon^5 (\varepsilon^2 + 1)^{\frac{3}{2}} (s^2 - r t)(p^2 r + 2 p q s + q^2 t)$$

$$C = \varepsilon^2 (\varepsilon^2 + 1)^3 \{- [\varepsilon^2 s - p q (r + t)]^2 + 4 p q (q s - p t)(p s - q r)\}$$
$$= \varepsilon^2 (\varepsilon^2 + 1)^3 [- s^2 (p^2 - q^2)^2 - p^2 q^2 (r - t)^2 + 2 p q s (p^2 r$$
$$+ q^2 r + p^2 t + q^2 t - 2 p^2 t - 2 q^2 r]$$
$$C = - \varepsilon^2 (\varepsilon^2 + 1)^3 [s (p^2 - q^2) - p q (r - t)]^2$$

Dementsprechend lautet die quadratische Gleichung der Grenzpunkte:

$$4 \varepsilon^6 (\varepsilon^2 + 1)(s^2 - r t)^2 r_0^2 + 4 r_0 \varepsilon^5 (\varepsilon^2 + 1)^{\frac{3}{2}} (s^2 - r t)(p^2 r$$
$$+ 2 p q s + q^2 t) - [s (p^2 - q^2) - p q (r - t)]^2 \varepsilon^2 (\varepsilon^2 + 1)^3 = 0 \quad (5.)$$

oder

$$r_0^2 + r_0 \frac{\sqrt{\varepsilon^2+1}}{\varepsilon} \frac{p^2 r + 2 p q s + q^2 t}{s^2 - r t}$$

$$- \frac{(\varepsilon^2+1)^2}{4\varepsilon^4} \left(\frac{s(p^2 - q^2) - p q (r - t)}{s^2 - r t} \right)^2 = 0 . \qquad (6.)$$

Eliminieren wir aus den Gleichungen (1.) und (3.) nicht $dy : dx$ sondern r_0, so erhalten wir eine quadratische Gleichung in $dy : dx$, die die Hauptflächen definiert. Dies ergibt:

$$\left\{ \varepsilon^4 \left((r^2 + s^2) + s(r+t) \frac{dy}{dx} \right) + (q r - p s)^2 + (q r - p s) \right.$$

$$\left. \cdot (q s - p t) \frac{dy}{dx} \right\} \cdot \left\{ [\varepsilon^2 s - p q (r+t)] \varepsilon (\varepsilon^2+1)^{\frac{3}{2}} \right.$$

$$\left. - 2 p (q s - p t) \varepsilon (\varepsilon^2+1)^{\frac{3}{2}} \frac{dy}{dx} \right\} = \left\{ \varepsilon^4 [(r+t) s + (s^2 + t^2) \frac{dy}{dx} \right.$$

$$\left. + (q s - p t)^2 \frac{dy}{dx} + (q r - p s)(q s - p t) \right\} \cdot \left\{ 2 q \varepsilon (\varepsilon^2+1)^{\frac{3}{2}} (q r - p s) \right.$$

$$\left. + [\varepsilon^2 s - p q (r+t)] \varepsilon (\varepsilon^2+1)^{\frac{3}{2}} \frac{dy}{dx} \right\} .$$

Multiplizieren wir aus und ordnen nach Potenzen von $dy : dx$, so ist:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \left\{ [\varepsilon^4 (s^2 + t^2) + (q s - p t)^2] [\varepsilon^2 s - p q (r+t)] \right.$$

$$\left. + [\varepsilon^4 (r+t) s + (q r - p s)(q s - p t)] 2 p (q s - p t) \right\}$$

$$+ 2 \frac{dy}{dx} \left\{ q (q r - p s) [\varepsilon^4 (s^2 + t^2) + (q s - p t)^2] \right.$$

$$\left. + p (q s - p t) [\varepsilon^4 (r^2 + s^2) + (q r - p s)^2] \right\}$$

$$+ 2 q (q r - p s) [\varepsilon^4 (r+t) s + (q r - p s)(q s - p t)]$$

$$- [\varepsilon^4 (r^2 + s^2) + (q r - p s)^2] [\varepsilon^2 s - p q (r+t)] = 0 \qquad (7.)$$

die Differentialgleichung der Hauptflächen.

§ 4. Abwickelbare Flächen und Brennpunkte.

Unter der Schar von ∞^2 Regelflächen eines Strahlensystems gibt es 2 ∞^1 Scharen von abwickelbaren Flächen. Für diese wird der kürzeste Abstand $d p_0 = 0$, d. h.

$$q\,dx - p\,dy = 0 \tag{1.}$$

$$(p\,r + q\,s)\,dx + (p\,s + q\,t)\,dy = 0. \tag{2.}$$

Die erste Gleichung definiert die Fallinien der Fläche. Da nun die Böschungsstrahlen — wie im nächsten Paragraphen gezeigt wird — Tangenten der Fallinien sind, so bilden die Tangentenflächen der Fallinien die eine ∞^1 Schar von abwickelbaren Flächen des Systems.

Die 2. Differentialgleichung ist die der Isophoten (§ 2, 5). Die 2. Schar von abwickelbaren Flächen sind, wie es sein muss, somit die Böschungsflächen, die sich also darstellen durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - p\,\frac{t_0}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2+1}}, \\ \eta &= y - q\,\frac{t_0}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2+1}}, \\ \zeta &= z - \frac{\varepsilon\,t_0}{\sqrt{\varepsilon^2+1}}, \end{aligned}\right\} \tag{3.}$$

wenn ε konstant ist.

Für x, y, z bestehen noch die beiden Gleichungen:

$$z = f(x, y),$$

$$p^2 + q^2 = \varepsilon^2 \ (\S\ 2,\ 2),$$

so dass wir für die Böschungsfläche 5 Gleichungen mit 4 Variabeln besitzen, von denen wir 2 eliminieren müssen, um die Fläche in der gewöhnlichen Parameterdarstellung zu erhalten.

Zur Bestimmung der Brennpunkte eines Strahls berechne ich aus (1.) resp. (2.) $dy : dx$ und setze die gefundenen Werte in die Gleichung für r_0 ein (§ 2, 11). Die Abszissen

der beiden Brennpunkte mögen mit ϱ_1 und ϱ_2 bezeichnet werden und zwar derjenige, der sich mittels (1.) ergibt, mit ϱ_1.

Es wird dann $\varrho_1 = 0$.

Der eine Brennpunkt liegt also, wie von vornherein klar war, auf der gegebenen Fläche, die Brennfläche ist.

Für den 2. Brennpunkt folgt aus (2.)

$$d\,x = \lambda\,(p\,s + q\,t);\ d\,y = -\lambda\,(p\,r + q\,s),$$

wo λ ein Proportionalitätsfaktor ist.

Setzen wir diese Werte in r_0 ein, so ergibt der Zähler:

$$\lambda^2\,[p\,q\,s + q^2\,t + p^2\,r + p\,q\,s]\,[(q\,r - p\,s)\,(p\,s + q\,t)$$
$$-(p\,r + q\,s)\,(q\,s - p\,t)]\,\varepsilon\,(\varepsilon^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$$
$$= \lambda^2\,\varepsilon^3\,(\varepsilon^2 + 1)^{\frac{3}{2}}\,(p^2\,r + 2\,p\,q\,s + q^2\,t)\,(r\,t - s^2).$$

Für den Nenner ist:

$$\lambda^2\,\Big\{\varepsilon^4\,[(r^2 + s^2)\,(p\,s + q\,t)^2 - 2\,s\,(r + t)\,(p\,s + q\,t)\,(p\,r + q\,s)$$
$$+ (s^2 + t^2)\,(p\,r + q\,s)^2] + [(q\,r - p\,s)\,(p\,s + q\,t)$$
$$-(p\,r + q\,s)\,(q\,s - p\,t)]^2\Big\}$$
$$= \lambda^2\,\varepsilon^4\,(\varepsilon^2 + 1)\,(r\,t - s^2)^2.$$

Somit ergibt sich als Abszisse des 2. Brennpunktes

$$\varrho_2 = \frac{(p^2\,r + 2\,p\,q\,s + q^2\,t)\,\sqrt{\varepsilon^2 + 1}}{\varepsilon\,(r\,t - s^2)}. \qquad (4.)$$

Werden die Abszissen der beiden Grenzpunkte eines Strahls mit r_1 und r_2 bezeichnet, so ist gemäss Gleichung (6.) § 3

$$r_1 + r_2 = \varrho_1 + \varrho_2.$$

Somit haben wir das bekannte Resultat verifiziert, dass die Summe der Abszissen der Brennpunkte gleich der Summe der Abszissen der Grenzpunkte ist.

§ 5. Brennflächen.

Der geometrische Ort der Brennpunkte sind die beiden Brennflächen. Die eine ist, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, die gegebene Fläche, die zweite erhält man durch Einsetzen des Wertes von ϱ_2 in die Gleichungen des Strahlensystems für t_0. Somit ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - \frac{p}{p^2+q^2}\,\frac{p^2 r + 2pqs + q^2 t}{rt - s^2}, \\ \eta &= y - \frac{q}{p^2+q^2}\,\frac{p^2 r + 2pqs + q^2 t}{rt - s^2}, \\ \zeta &= z - \frac{p^2 r + 2pqs + q^2 t}{rt - s^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.)$$

Die beiden Brennflächen kann man sich auch durch die Rückkehrkanten der beiden Scharen von abwickelbaren Flächen (§ 4) erzeugt denken, und zwar liegen die Gratlinien der Böschungsflächen, die allgemeine Schraubenlinien sind, auf der 2. Brennfläche, während die Gratlinien der anderen Schar identisch sind mit den Fallinien der gegebenen Fläche. Die beiden Scharen zeichnen auf jeder der beiden Brennflächen 2 Systeme von Kurven, die einander zugeordnet sind. Somit haben wir den Satz:

Isophoten und Fallinien sind zu einander konjugiert.

Diese Beziehung zwischen Isophoten und Fallinien lässt sich geometrisch wie auch analytisch direkt aus der Definition konjugierter Richtungen ableiten.

Betrachten wir nämlich im Punkte P einer Fläche das Linienelement der Isophote und denken uns in den beiden Endpunkten des Linienelements die Tangentenebenen, so schneiden sich diese in der Erzeugenden der zugehörigen

Böschungsfläche. Da sie als solche Fallinie ist, ist sie parallel dem Linienelement, das durch die Richtung der durch P gehenden Fallinie bestimmt ist.

Analytisch erhält man das Ergebnis in folgender Weise.

Sind
$$(\xi - x)\,p + (\eta - y)\,q + \zeta - z = 0,$$
$$(\xi - x)\,dp + (\eta - y)\,dq = 0, \qquad (2.)$$

die Tangentenebenen in P und dem benachbarten Punkte P' und ist (dx, dy, dz) die zu PP' konjugierte Richtung, so wird die Schnittlinie der beiden Tangentenebenen dargestellt durch: $(\xi - x) : (\eta - y) : (\zeta - z) = dx : dy : dz$,

oder werden $(\xi - x) : (\eta - y)$ aus dieser und der Gleichung (2.) eliminiert:

$$dp\,dx + dq\,dy = 0. \qquad (3.)$$

Sind nun P und P' Punkte einer Isophote, so gilt für sie (§ 2, 3):

$$p\,dp + q\,dq = 0. \qquad (4.)$$

Werden $dp : dq$ aus (3.) und (4.) eliminiert, so erhält man die Differentialgleichung der Fallinien:

$$q\,dx - p\,dy = 0.$$

Aus dem Vorigen ergibt sich auch folgende Erzeugung des Böschungsstrahlensystems. Man konstruiere auf einer beliebigen Fläche eine Schar allgemeiner Schraubenlinien, die auf parallellen Zylindern geodätisch sind, sodann die zu diesen konjugierten Kurven. Die Tangentenflächen dieser Schraubenlinien, die Böschungsflächen sind, hüllen eine Fläche ein, schneiden sich also längs der Isophoten dieser Fläche. Die Tangenten der ∞^1 Schraubenlinien bilden das Böschungsstrahlensystem.

§ 6. Kummers Fundamentalgrössen.

Eine Fläche stelle sich dar durch die Gleichungen:

$$x = \varphi(u, v) \quad y = \psi(u, v) \quad z = \chi(u, v). \qquad (1.)$$

$v =$ konstant ergebe die Isophoten.

Die Richtungscosinus der Flächennormale ergeben sich als:

$$a = \frac{y_u z_v - z_u y_v}{\sqrt{(x_u y_v - y_u x_v)^2 + (y_u z_v - z_u y_v)^2 + (z_u x_v - x_u z_v)^2}},$$

$$b = \frac{z_u x_v - x_u z_v}{\sqrt{(x_u y_v - y_u x_v)^2 + (y_u z_v - z_u y_v)^2 + (z_u x_v - x_u z_v)^2}},$$

$$c = \frac{x_u y_v - y_u x_v}{\sqrt{(x_u y_v - y_u x_v)^2 + (y_u z_v - z_u y_v)^2 + (z_u x_v - x_u z_v)^2}}.$$

Aus der letzten Gleichung folgt für ε in Hinsicht auf § 1 Gleichung (4.):

$$(y_u z_v - z_u y_v)^2 + (z_u x_v - x_u z_v)^2 = \varepsilon^2 (x_u y_v - y_u x_v)^2 \quad (2.)$$

Damit gehen a, b, c über in:

$$a = \frac{y_u z_v - z_u y_v}{x_u y_v - y_u x_v} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + 1}},$$

$$b = \frac{z_u x_v - x_u z_v}{x_u y_v - y_u x_v} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + 1}},$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + 1}}.$$

Die Richtungscosinus der Böschungsstrahlen (§ 1, 5) ergeben dann:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{y_u z_v - z_u y_v}{x_u y_v - y_u x_v} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 + 1}}, \\ Y &= \frac{z_u x_v - x_u z_v}{x_u y_v - y_u x_v} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 + 1}}, \\ Z &= -\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + 1}}. \end{aligned}\right\} \quad (3.)$$

Kummers Fundamentalgrössen[1]) lauten:

---

1) Kommerell: Theorie der Strahlensysteme. Sammlung Schubert LXII, § 21. Leipzig 1911.

$$E_0 = \Sigma \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2; \qquad F_0 = \Sigma \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v};$$

$$G_0 = \Sigma \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2;$$

$$D_0 = -\Sigma \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}; \qquad D' = -\Sigma \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v};$$

$$D_1' = -\Sigma \frac{\partial X}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}; \qquad D'' = -\Sigma \frac{\partial X}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Zur Berechnung dieser Ausdrücke bilden wir nun die partiellen Ableitungen nach u und v des Gleichungstripels (3.)

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{1}{(x_u y_v - y_u x_v)^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2+1}} [(z_{uv} y_u - z_{uu} y_v)(x_u y_v - y_u x_v) + (x_{uv} y_u - x_{uu} y_v)(y_u z_v - z_u y_v) + (y_{uv} y_u - y_{uu} y_v) \cdot (z_u x_v - x_u z_v)],$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{1}{(x_u y_v - y_u x_v)^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2+1}} [(z_{vv} y_u - z_{uv} y_v) \cdot (x_u y_v - y_u x_v) + (x_{vv} y_u - x_{uv} y_v)(y_u z_v - z_u y_v) + (y_{vv} y_u - y_{uv} y_v)(z_u x_v - x_u z_v)] - \frac{1+2\varepsilon^2}{\varepsilon^2\sqrt{(\varepsilon^2+1)^3}} \cdot \frac{y_u z_v - z_u y_v}{x_u y_v - y_u x_v} \cdot \frac{d\varepsilon}{dv},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{1}{(x_u y_v - y_u x_v)^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2+1}} [(z_{uu} x_v - z_{uv} x_u) \cdot (x_u y_v - y_u x_v) + (x_{uu} x_v - x_{uv} x_u)(y_u z_v - z_u y_v) + (y_{uu} x_v - y_{uv} x_u)(z_u x_v - x_u z_v)],$$

$$\frac{\partial Y}{\partial v} = \frac{1}{(x_u y_v - y_u x_v)^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2+1}} [(z_{uv} x_v - z_{vv} x_u) \cdot (x_u y_v - y_u x_v) + (x_{uv} x_v - x_{vv} x_u)(y_u z_v - z_u y_v) + (y_{uv} x_v - y_{vv} x_u)(z_u x_v - x_u z_v)] - \frac{1+2\varepsilon^2}{\varepsilon^2\sqrt{(\varepsilon^2+1)^3}} \cdot \frac{z_u x_v - x_u z_v}{x_u y_v - y_u x_v} \cdot \frac{d\varepsilon}{dv},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial u} = 0; \quad \frac{\partial Z}{\partial v} = -\frac{1}{(\varepsilon^2+1)^3} \cdot \frac{d\varepsilon}{dv}.$$

Diese Gleichungen schreiben sich in Hinsicht auf (3.):

$$\frac{\partial X}{\partial u} = X\frac{x_{uv}y_u - x_{uu}y_v}{x_u y_v - y_u x_v} + Y\frac{y_{uv}y_u - y_{uu}y_v}{x_u y_v - y_u x_v}$$

$$- \frac{Z}{\varepsilon^2} \cdot \frac{z_{uv}y_u - z_{vu}y_v}{x_u y_v - y_u x_v},$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = X\frac{x_{vv}y_u - x_{uv}y_v}{x_u y_v - y_u x_v} + Y\frac{y_{vv}y_u - y_{uv}y_v}{x_u y_v - y_u x_v}$$

$$- \frac{Z}{\varepsilon^2} \cdot \frac{z_{vv}y_u - z_{uv}y_v}{x_u y_v - y_u x_v} - X\frac{1+2\varepsilon^2}{\varepsilon(\varepsilon^2+1)} \cdot \frac{d\varepsilon}{dv},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial u} = -X\frac{x_{uv}x_u - x_{uu}x_v}{x_u y_v - y_u x_v} - Y\frac{y_{uv}x_u - y_{uu}x_v}{x_u y_v - y_u x_v}$$

$$+ \frac{Z}{\varepsilon^2} \cdot \frac{z_{uv}x_u - z_{uu}x_v}{x_u y_v - y_u x_v},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial v} = -X\frac{x_{vv}x_u - x_{uv}x_v}{x_u y_v - y_u x_v} - Y\frac{y_{vv}x_u - y_{uv}x_v}{x_u y_v - y_u x_v}$$

$$+ \frac{Z}{\varepsilon^2} \cdot \frac{z_{vv}x_u - z_{uv}x_v}{x_u y_v - y_u x_v} - Y\frac{1+2\varepsilon^2}{2(\varepsilon^2+1)} \cdot \frac{d\varepsilon}{dv}.$$

Hieraus ergeben sich:

$$D_0 = Xx_{uu} + Yy_{uu} - \frac{Z}{\varepsilon^2} \cdot z_{uu},$$

$$D' = Xx_{uv} + Yy_{uv} - \frac{Z}{\varepsilon^2} \cdot z_{uv},$$

$$D_1' = Xx_{uv} + Yy_{uv} - \frac{Z}{\varepsilon^2} \cdot z_{uv} + \frac{z_u}{\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon^2+1}} \frac{d\varepsilon}{dv},$$

$$D'' = Xx_{vv} + Yy_{vv} - \frac{Z}{\varepsilon^2} \cdot z_{vv} + \frac{z_v}{\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon^2+1}} \frac{d\varepsilon}{dv}.$$

E_0, F_0, G_0 ergeben nur geringe Vereinfachungen. Dagegen gestattet der Ausdruck $E_0\,G_0 - F_0^2$ eine Umformung:

$$E_0\,G_0 - F_0^2 = (X_u^2 + Y_u^2 + Z_u^2)\,(X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2) - (X_u\,X_v + Y_u\,Y_v + Z_u\,Z_v)$$
$$= (X_u\,Y_v - Y_u\,X_v)^2 + (Y_u\,Z_v - Z_u\,Y_v)^2 + (Z_u\,X_v - X_u\,Z_v)^2.$$

Die Grenzpunkte berechnen sich aus der Gleichung:[1])

$$(E_0\,G_0 - F_0^2)\,r_0^2 - [D''\,E_0 - (D' + D_1')\,F_0 + D_0\,G_0]\,r_0 + D_0\,D'' - \left(\frac{D' + D_1'}{2}\right)^2 = 0. \qquad (4.)$$

Für die Hauptflächen gilt die Differentialgleichung:[2])

$$\left(\frac{D' + D_1'}{2}\,E_0 - D_0\,F_0\right)du^2 + (D''\,E_0 - D_0\,G_0)\,du\,dv + \left(D''\,F_0 - \frac{D' + D_1'}{2}\,G_0\right)dv^2 = 0. \qquad (5.)$$

Die Brennpunkte ergeben sich aus der Gleichung:[3])

$$(E_0\,G_0 - F_0^2)\,\varrho_0^2 - [D''\,E_0 - (D' + D_1')\,F_0 + D_0\,G_0]\,\varrho_0 + D_0\,D'' - D'\,D_1' = 0. \qquad (6.)$$

Damit in der Gleichung (6.) eine Wurzel verschwindet, sind als Parameterlinien Isophoten und Fallinien zu wählen.

Die Differentialgleichung[4]) der Fallinien ist:

$$(E\,z_v - F\,z_u)\,du + (F\,z_v - G\,z_u)\,dv = 0. \qquad (7.)$$

---

1) Kommerell: a. a. O. S. 103, 2.

2) Kommerell: a. a. O. Seite 103, 3.

3) desgl. Seite 107, 4.

4) Reimerdes: Die Niveaulinien und Fallinien auf Flächen insbesondere auf Modulflächen analytischer Funktionen. Teubner. Leipzig 1911. § 2.

Die Bedingung,[1]) dass die Isophoten $(du_1 : dv_1)$ zu jenen konjugiert sind, lautet:

$$L\,du\,du_1 + M(du\,dv_1 + du_1\,dv) + N\,dv\,dv_1 = 0.$$

Hieraus ergibt sich die Differentialgleichung der Isophoten durch Elimination von $du : dv$ als:

$$[L(Fz_v - Gz_u) - M(Ez_v - Fz_u)]\,du_1$$
$$+ [M(Fz_v - Gz_u) - N(Ez_v - Fz_u)]\,dv_1 = 0. \qquad (8.)$$

Die gewonnenen Formeln bilden die Grundlage für die Theorie der Böschungsstrahlensysteme, von denen im folgenden Abschnitt wichtige Klassen untersucht werden sollen.

---

1) Kommerell: Raumkurven und Flächen II, Sammlung Schubert XLIV Seite 19, 4.

II. Kapitel.

Spezielle Systeme von Böschungsstrahlen.

§ 7. Das Normalensystem.

Um bei der Flächendarstellung in Parameterform das Normalensystem zu erhalten, haben wir zu setzen:

$$D' = D_1'.$$

Es muss daher sein:

$$\frac{z_u}{\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon^2+1}} = 0.$$

$\varepsilon^2 = p^2 + q^2$ kann nur für einzelne Flächenpunkte unendlich werden, somit ist notwendig:

$$z_u = 0;$$

also ist z nur von dem Parameter ε abhängig. Da die Parameterlinien $\varepsilon =$ konst. die Isophoten darstellen, so folgt hieraus, dass die Isophoten mit den Niveaulinien zusammenfallen; sie sind daher ebene Kurven.

Zu demselben Ergebnis gelangen wir auch mittels der Flächendarstellung $z = f(x, y)$.

In diesem Falle lautet die Bedingung für das Normalensystem, da die Grenzpunkte mit den Brennpunkten zusammenfallen müssen:

$$r_1 = \varrho_1 = 0;\ r_2 = \varrho_2.$$

Daher muss in der quadratischen Gleichung für r_0 das absolute Glied verschwinden, also:

$$s(p^2 - q^2) - p\,q\,(r - t) = 0, \tag{1.}$$

oder

$$p(p\,s + q\,t) - q(p\,r + q\,s) = 0.$$

Untersuchen wir nun, welche Bedingung hieraus für die Isophote entspringt. Zu diesem Zwecke eliminieren wir aus der letzten Gleichung und der der Isophoten:

$$(p\,r + q\,s)\,dx + (p\,s + q\,t)\,dy = 0, \qquad (2.)$$

das Verhältnis $(p\,r + q\,s) : (p\,s + q\,t)$.

Es ergibt sich die Differentialgleichung der Niveaulinien:

$$p\,dx + q\,dy = 0.$$

Die Differentialgleichung (1) definiert die Mongeschen Gesimsflächen. Wir sehen also, dass für Gesimsflächen unser Strahlensystem in ein Normalensystem übergeht. Für diese Flächen hat Reimerdes[1]) gezeigt, dass die Fallinien Krümmungslinien sind, daher sind es auch die Isophoten. Wir haben somit den Satz: Sind auf einer Fläche die Isophoten Krümmungslinien, so fallen sie mit den Niveaulinien zusammen. Ferner sind die Fallinien eben, da sie geodätisch sind.[2])

Obige Gesimsflächen lassen sich auch durch folgende Gleichungen darstellen:[3])

---

1) Reimerdes: Die Niveaulinien und Fallinien auf Flächen, insbesondere auf Modulflächen analytischer Funktionen. Inaugural-Dissertation. Leipzig 1911. § 4.

2) G. Monge: Application de l'analyse à la géométrie (§ VIII) (Paris Bochelier 1850). Nach Kommerell sind diese Gesimsflächen zuerst von Euler behandelt worden, vgl.

1. „De methodo tangentium inversa ad theoriam solidorum translata“ (2. Sept. 1776). Nova Acta Academiae Petropolitonae VI p. 77—94.
2. „Investigatio superficierum, quarum normales ad datum planum productae sint omnes inter se aequales“ (28. Dez. 1777). Ebenda X p. 41—46.
3. De corporibus cylindricis incurvatis“ (21. Sept. 1778). Ebenda XII p. 91—100.

3) Darboux: Leçons sur la théorie générale des surfaces. Paris 1887 Bd. 1. S. 105.

$$\left.\begin{aligned} x &= aU\cos\frac{v}{a} + \int V\sin\frac{v}{a}\,dv, \\ y &= aU\sin\frac{v}{a} - \int V\cos\frac{v}{a}\,dv, \\ z &= \int\sqrt{1-a^2U'^2}\,du, \end{aligned}\right\} \qquad (3.)$$

wo $U = U(u)$, $V = V(v)$ ist.

In diesen Gleichungen stellen $v =$ konst. die Fallinien und $u =$ konst. die Isophoten dar; ε ist daher nur eine Funktion von u.

Ist $V =$ konst., so erhalten wir den speziellen Fall der Rotationsflächen. Für diese geht die Böschungsfläche über in einen Kreiskegel, dessen Spitze auf der Rotationsachse liegt. Die zweite Brennfläche artet in die Rotationsachse beziehungsweise in einen Teil dieser aus.

Konstruieren wir nun für die Gesimsflächen unser Strahlensystem. ε berechnet sich als Funktion von u nach Gleichung (2.) § 6 als:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{1-a^2U'^2}}{aU'}.$$

Die Richtungscosinus der Böschungsflächen gehen daher über in:

$$X = -aU'\cos\frac{v}{a};\quad Y = -aU'\sin\frac{v}{a};\quad Z = -\sqrt{1-a^2U'^2}.$$

Als partielle Ableitungen erhalten wir:

$$X_u = -aU''\cos\frac{v}{a};\quad Y_u = -aU''\sin\frac{v}{a};\quad Z_u = \frac{a^2U'U''}{\sqrt{1-a^2U'^2}};$$

$$X_v = U'\sin\frac{v}{a};\quad Y_v = -U'\cos\frac{v}{a};\quad Z_v = 0.$$

Die Fundamentalgrössen lauten dementsprechend:

$$E_0 = \frac{a^2U''^2}{1-a^2U'^2};\qquad F_0 = 0;\qquad G_0 = U'^2;$$

$$D = D' = D_1' = 0;\quad D'' = (U-V)U'.$$

Die Gleichung (6.) in § 6 für die Brennpunkte geht über in:

$$\varrho^2 E_0 G_0 - \varrho\ D'' E_0 = 0.$$

1. $\varrho_1 = 0.$

2. $$\varrho_2 = \frac{D''}{G_0} = \frac{U - V}{U'}. \qquad (4.)$$

Die Böschungsfläche (§ 4, 3) stellt sich demnach dar durch die Gleichungen:

$$\xi = a U \cos\frac{v}{a} - \frac{t_0 \cos\frac{v}{a}}{\sqrt{\varepsilon^2 + 1}} + \int V \sin\frac{v}{a}\, dv,$$

$$\eta = a U \sin\frac{v}{a} - \frac{t_0 \sin\frac{v}{a}}{\sqrt{\varepsilon^2 + 1}} - \int V \cos\frac{v}{a}\, dv,$$

$$\zeta = \int \sqrt{1 - a^2 U'^2}\, du - \frac{\varepsilon t_0}{\sqrt{\varepsilon^2 + 1}},$$

wenn t_0 und v die beiden Parameter sind. U berechnet sich nach Gleichung (4.) als Funktion von ε, das für eine Böschungsfläche konstant ist.

Setzt man

$$t_0 = \varrho_2 = \frac{U - V}{U'},$$

so erhält man als Gleichungen der zweiten Brennfläche:

$$\xi = a V \cos\frac{v}{a} + \int V \sin\frac{v}{a}\, dv = a \int V' \cos\frac{v}{a}\, dv,$$

$$\eta = a V \sin\frac{v}{a} - \int V \cos\frac{v}{a}\, dv = a \int V' \sin\frac{v}{a}\, dv,$$

$$\zeta = \int \sqrt{1 - a^2 U'^2}\, du - \sqrt{1 - a^2 U'^2}\,\frac{U - V}{U'}.$$

$u =$ konst. ergibt die Gratlinie der Böschungsfläche, also eine Parallele zur ζ-Achse. Die zweite Brennfläche ist, was geometrisch sofort einleuchtet, ein zur Horizontalebene senkrechter Zylinder. Den Fallinien auf der gegebenen Fläche entsprechen die Geraden des Zylinders, den Isophoten Schraubenlinien. Die Mittelfläche stellt sich, nebenbei bemerkt, dar durch die Gleichungen:

$$\xi = \frac{a}{2}\cos\frac{v}{a}(U+V) + \int V \sin\frac{v}{a}\,dv,$$

$$\eta = \frac{a}{2}\sin\frac{v}{a}(U+V) - \int V\cos\frac{v}{a}\,dv,$$

$$\zeta = \int\sqrt{1-a^2U'^2}\,du - \frac{1}{2}(U-V)\frac{\sqrt{1-a^2U'^2}}{U'}.$$

Auf ein genaues Studium dieser Flächen wollen wir hier nicht eingehen.

§ 8. Das parabolische Strahlensystem.

Damit ein Strahlensystem parabolisch ist, müssen die beiden Brennpunkte zusammenfallen. Dies tritt immer ein, wenn die Gratlinien der abwickelbaren Flächen auf der Brennfläche Asymptotenlinien sind. Die Differentialgleichung dieser Flächen erhalten wir, da Isophoten und Fallinien zusammenfallen, durch Elimination von $dy : dx$ aus den Differentialgleichungen beider:

$$(pr+qs)\,dx + (ps+qt)\,dy = 0,$$
$$q\,dx - p\,dy = 0.$$

Somit ergibt sich:

$$p^2r + 2pqs + q^2t = 0. \qquad (1.)$$

Andererseits folgt diese Gleichung auch aus der Bedingung des Zusammenfallens der beiden Brennpunkte nach § 4, 4, oder aus der Bedingung, dass die Isophoten oder Fallinien Asymptotenlinien sind.

Die Lösung der Differentialgleichung (1.) ist von Turrière[1]) angegeben. Sind u und v zwei Parameter und genügt $V(u, v)$ der Differentialgleichung der Wärmeleitung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = \frac{\partial V}{\partial u}, \tag{2.}$$

so stellen sich die Flächen dar durch:

$$\left.\begin{aligned} x &= e^u\left(-\cos v\,\frac{\partial V}{\partial u} - \sin v\,\frac{\partial V}{\partial v}\right),\\ y &= e^u\left(-\sin v\,\frac{\partial V}{\partial u} + \cos v\,\frac{\partial V}{\partial v}\right),\\ z &= V + \frac{\partial V}{\partial u}. \end{aligned}\right\} \tag{3.}$$

Als partielle Ableitungen ergeben sich:

$$\begin{aligned} x_u &= -e^u(z_u\cos v + z_v\sin v),\\ y_u &= \;\;e^u(z_v\cos v - z_u\sin v),\\ z_u &= \;\;\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial^2 V}{\partial u^2},\\ x_v &= -e^u z_v\cos v,\\ y_v &= -e^u z_v\sin v,\\ z_v &= \;\;\frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial^2 V}{\partial u\,\partial v}. \end{aligned}$$

Daher berechnen sich die Fundamentalgrössen 1. Ordnung als:

$$\begin{aligned} E &= z_u{}^2(e^{2u}+1) + z_v{}^2 e^{2u},\\ F &= z_u z_v(e^{2u}+1),\\ G &= z_v{}^2(e^{2u}+1),\\ D^2 &= EG - F^2 = z_v{}^4 e^{2u}(e^{2u}+1). \end{aligned}$$

---

1) Turrière: Sur un trièdre mobile. (Nouvelles Annales de Mathématiques. (4) **10**, Paris 1910. S. 196).

Die Richtungscosinus der Flächennormalen sind:

$$a = \frac{\cos v}{\sqrt{e^{2u}+1}}; \quad b = \frac{\sin v}{\sqrt{e^{2u}+1}}; \quad c = \frac{e^u}{\sqrt{e^{2u}+1}};$$

ihre partiellen Ableitungen lauten:

$$a_u = -\frac{\cos v \cdot e^{2u}}{(e^{2u}+1)^{\frac{3}{2}}}; \qquad a_v = -\frac{\sin v}{\sqrt{e^{2u}+1}};$$

$$b_u = -\frac{\sin v \cdot e^{2u}}{(e^{2u}+1)^{\frac{3}{2}}}; \qquad b_v = \frac{\cos v}{\sqrt{e^{2u}+1}};$$

$$c_u = \frac{e^u}{(e^{2u}+1)^{\frac{3}{2}}}; \qquad c_v = 0.$$

Dementsprechend ergeben sich als Fundamentalgrössen 2. Ordnung:

$$L = -\frac{e^u z_u}{\sqrt{e^{2u}+1}}; \qquad M = -\frac{e^u z_v}{\sqrt{e^{2u}+1}}; \qquad N = 0.$$

Als Krümmungsmass ergibt sich:

$$K = -\frac{1}{z_v{}^2 (e^{2u}+1)^2}, \tag{4.}$$

als mittlere Krümmung:

$$H = \frac{z_u}{e^u z_v{}^2 \sqrt{e^{2u}+1}}.$$

Die Differentialgleichung, die bei dieser Flächendarstellung der Gleichung (1.) entspricht, erhalten wir durch Elimination von $du : dv$ aus den Gleichungen der Fallinien und der Isophoten:

$$(E z_v - F z_u)\, du + (F z_v - G z_u)\, dv = 0. \tag{5.}$$

$$[L(F z_v - G z_u) - M(E z_v - F z_u)]\, du + [M(F z_v - G z_u) - N(E z_v - F z_u)]\, dv = 0.$$

Sie lautet daher:

$$L(F z_v - G z_u)^2 - 2M(F z_v - G z_u)(E z_v - F z_u) + N(E z_v - F z_u)^2 = 0. \tag{6.}$$

Da für die Flächen (3.)

$$N = 0 \text{ und } F z_v - G z_u = 0, \tag{7.}$$

so genügen sie der Gleichung (6.).

Da $E z_v - F z_u \neq 0$, so folgt in Hinsicht auf (7.) für die Fallinien aus Gleichung (5.) $u = \text{konst.}$

Die Fallinien sind, da ihre Tangenten mit der z-Achse denselben Winkel bilden, allgemeine Schraubenlinien.

Für das Strahlensystem ergeben sich folgende Ausdrücke (siehe § 6):

$$X = \frac{\cos v}{\varepsilon\sqrt{\epsilon^{2u}+1}}; \quad Y = \frac{\sin v}{\varepsilon\sqrt{e^{2u}+1}}; \quad Z = \frac{-e^u}{\varepsilon\sqrt{e^{2u}+1}}.$$

Die Funktion ε des Böschungswinkels ergibt sich hieraus als:

$$\varepsilon = \frac{1}{e^u}. \tag{8.}$$

Mit Rücksicht auf (8.) gehen die Richtungscosinus der Böschungsstrahlen über in:

$$X = \frac{e^u \cos v}{\sqrt{1+e^{2u}}}; \quad Y = \frac{e^u \sin v}{\sqrt{1+e^{2u}}}; \quad Z = -\frac{e^{2u}}{\sqrt{1+e^{2u}}};$$

ihre partiellen Ableitungen sind:

$$X_u = \frac{e^u \cos v}{(1+e^{2u})^{\frac{3}{2}}}; \quad Y_u = \frac{e^u \sin v}{(1+e^{2u})^{\frac{3}{2}}}; \quad Z_u = \frac{e^{2u}}{(1+e^u)^{\frac{3}{2}}};$$

$$X_v = -\frac{e^u \sin v}{\sqrt{1+e^{2u}}}; \quad Y_v = \frac{e^u \cos v}{\sqrt{1+e^{2u}}}; \quad Z_v = 0.$$

Dementsprechend lauten die Kummerschen Fundamentalgrössen:

$$E_0 = \frac{e^{2u}}{(1+e^{2u})^2}; \quad F_0 = 0; \quad G_0 = \frac{e^{2u}}{1+e^{2u}};$$

$$E_0 G_0 - F_0^2 = \frac{e^{4u}}{(1+e^{2u})^3};$$

$$D = D' = D'' = 0; \qquad D_1' = -\frac{e^{2u}}{\sqrt{e^{2u}+1}} z_v.$$

Demnach geht die Gleichung für die Abszissen der Grenzpunkte über in:

$$r_0^2 \cdot E_0 G_0 = \frac{D_1'^2}{4},$$

$$r_0 = \pm \frac{D_1'}{2\sqrt{E_0 G_0}} = \frac{z_v}{2}(e^{2u}+1). \tag{9.}$$

Die Entfernung d der beiden Grenzpunkte ist also:

$$d = z_v (e^{2u}+1),$$

oder in Hinsicht auf Gleichung (4.):

$$d = \frac{1}{\sqrt{-K}}.$$

Diese Beziehung besteht für jedes parabolische Strahlensystem, das aus Tangenten einer Fläche gebildet wird.[1])

Das Strahlensystem stellt sich demnach dar durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= e^u\left(-\cos v \frac{\partial V}{\partial u} - \sin v \frac{\partial V}{\partial v}\right) + \frac{e^u \cos v}{\sqrt{1+e^{2u}}} t_0, \\ \eta &= e^u\left(-\sin v \frac{\partial V}{\partial u} + \cos v \frac{\partial V}{\partial v}\right) + \frac{e^u \sin v}{\sqrt{1+e^{2u}}} t_0, \\ \zeta &= V + \frac{\partial V}{\partial u} - \frac{e^{2u}}{\sqrt{1+e^{2u}}} t_0. \end{aligned}\right\} \tag{10.}$$

$u =$ konst. ergibt die Böschungsflächen.

---

1) Kommerell: Theorie der Strahlensysteme, Sammlung Schubert LXII, Leipzig 1911. S. 161, 25.

Für die Grenzflächen wird:

$$t_0 = r_0 = \pm \frac{z_v}{2} (e^{2u} + 1).$$

Die Gleichung für die Hauptflächen (§ 6, 5) geht über in:

$$E_0 \, du^2 - G_0 \, dv^2 = 0,$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2u}}},$$

$$v = \int \frac{du}{\sqrt{1 + e^{2u}}}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$u = -\lg \mathfrak{Sin}\,(c - v),$$

wo c eine Integrationskonstante ist.

Setzen wir diesen Wert für u in die Gleichungen (10.) ein, so stellen sie die Hauptflächen dar:

$$\xi = \frac{1}{\mathfrak{Sin}\,(c - v)} \left(-\cos v \, \frac{\partial V}{\partial u} - \sin v \, \frac{\partial V}{\partial v} \right) + \frac{\cos v}{\mathfrak{Cof}\, v} t_0,$$

$$\eta = \frac{1}{\mathfrak{Sin}\,(c - v)} \left(-\sin v \, \frac{\partial V}{\partial u} + \cos v \, \frac{\partial V}{\partial v} \right) + \frac{\sin v}{\mathfrak{Cof}\, v} t_0,$$

$$\zeta = V + \frac{\partial V}{\partial u} - \frac{t_0}{\mathfrak{Cof}\, v}.$$

Der Differentialgleichung (2.) genügen die Funktionen:[1])

$$V = e^{-\lambda^2 u} \cos \lambda v \quad \text{und} \quad V = e^{-\lambda^2 u} \sin \lambda v.$$

Setzen wir die erste in (3.) ein, so erhalten wir folgende Gleichungen einer Fläche:

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda e^{u(1-\lambda^2)} (\lambda \cos \lambda v \cos v + \sin \lambda v \sin v), \\ y &= \lambda e^{u(1-\lambda^2)} (\lambda \cos \lambda v \sin v - \sin \lambda v \cos v), \\ z &= (1 - \lambda^2) e^{-\lambda^2 u} \cos \lambda v. \end{aligned}\right\} \qquad (11.)$$

1) Riemann-Weber: Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Braunschweig 1901. 4. Auflage. Bd. 2. Seite 92.

Für $u =$ konst. erhält man die Gleichungen der mit den Fallinien zusammenfallenden Isophoten. Eliminieren wir v aus diesen 3 Gleichungen, so ergibt sich eine Rotationsfläche 2. Ordnung:

$$\frac{x^2 + y^2}{\lambda^2 e^{2u(1-\lambda^2)}} + \frac{z^2}{(1-\lambda^2) e^{-2\lambda^2 u}} = 1,$$

und zwar ein Rotationsellipsoid für $|\lambda| < 1$, ein Rotationshyperboloid für $|\lambda| > 1$, während für $|\lambda| = 1$ die Fläche in einen Punkt degeneriert. Dies Ergebnis können wir in folgendem Satz aussprechen:

Die durch die Gleichungen (11.) definierten Flächen werden von konzentrischen Rotationsflächen 2. Ordnung längs der Isophoten geschnitten.

Die Gleichungen des Strahlensystems ergeben sich als:

$$\xi = \lambda \cdot e^{u(1-\lambda^2)} [\lambda \cos \lambda v \cos v + \sin \lambda v \sin v] + \frac{e^u \cos v}{\sqrt{1 + e^{2u}}} t_0,$$

$$\eta = \lambda \cdot e^{u(1-\lambda^2)} [\lambda \cos \lambda v \sin v - \sin \lambda v \cos v] + \frac{e^u \sin v}{\sqrt{1 + e^{2u}}} t_0,$$

$$\zeta = e^{-\lambda^2 u} (1 - \lambda^2) \cos \lambda v - \frac{e^{2u}}{\sqrt{1 + e^{2u}}} t_0.$$

Betrachten wir hierin $u =$ konst., so gehen diese Gleichungen über in die der Böschungsfläche.

§ 9. Böschungsstrahlensysteme von Flächen, deren Niveaulinien Asymptotenlinien sind.

In diesem Paragraphen sollen solche Flächen betrachtet werden, deren Niveaulinien Asymptotenlinien sind. Es lässt sich zeigen, dass dann die Niveaulinien nur gerade Linien sein können. Wären sie nämlich andere ebene Kurven, so müsste ihre Hauptnormale, da ja die Niveaulinie gleichzeitig Asymptotenlinie sein soll, in der Tangentialebene des betreffenden Flächenpunktes liegen. Die Tangentialebene

ist dann horizontal. Wenn wir von Ebenen absehen, so ist dies nur für einzelne Flächenpunkte möglich; es ergibt sich also der Satz:

Sind die Niveaulinien einer Fläche Asymptotenlinien, so sind sie gerade Linien.

Die Differentialgleichung, der diese Flächen genügen, erhalten wir aus denen der Niveaulinien und Asymptotenlinien:

$$p\,dx + q\,dy = 0,$$
$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0,$$

durch Elimination von $dy : dx$ als

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0. \tag{1.}$$

Die allgemeine Lösung[1]) dieser Differentialgleichung ist:

$$\psi(z) = y + x\varphi(z). \tag{2.}$$

Aus dieser Gleichung ist ebenfalls ersichtlich, dass die Niveaulinien gerade Linien sind.

Mit Rücksicht auf die Gleichung (1.) vereinfachen sich die Ausdrücke für die Gratlinie der Böschungsfläche und für die zweite Brennfläche (§ 5,1) zu:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - p\frac{r+t}{rt-s^2}, \\ \eta &= y - q\frac{r+t}{rt-s^2}, \\ \zeta &= z - \varepsilon^2\frac{r+t}{rt-s^2}. \end{aligned}\right\} \tag{3.}$$

Setzen wir $\varepsilon = \text{konst.}$, so ergibt sich die Gratlinie der Böschungsfläche; bei variablem ε erhalten wir die zweite Brennfläche.

---

1) Forsyth: Lehrbuch der Differentialgleichungen. Deutsch von W. Jacobsthal, Braunschweig 1912. Seite 445. Aufgabe 3 a. Auflösung S. 852.

Für eine spezielle Flächenart dieser Gattung, nämlich für gerade Konoide mit horizontaler Richtebene, lässt sich eine Eigenschaft der zweiten Brennfläche ableiten. Diese Flächen stellen sich in Parameterform dar durch:

$$x = u\,\varphi(v); \quad y = u\,\psi(v); \quad z = \chi(v). \tag{4.}$$

Die partiellen Ableitungen sind:

$$\begin{array}{lll} x_u = \varphi; & y_u = \psi; & z_u = 0; \\ x_v = u\,\varphi'; & y_v = u\,\psi'; & z_v = \chi'; \\ x_{uu} = 0; & y_{uu} = 0; & z_{uu} = 0; \\ x_{uv} = \varphi'; & y_{uv} = \psi'; & z_{uv} = 0; \\ x_{vv} = u\,\varphi''; & y_{vv} = u\,\psi''; & z_{vv} = \chi''. \end{array}$$

Als Richtungscosinus der Flächennormalen ergeben sich:

$$a = \frac{\psi\,\chi'}{D}; \qquad b = -\frac{\varphi\,\chi'}{D}; \qquad c = u\,\frac{\varphi\,\psi' - \psi\,\varphi'}{D};$$

wenn $D = \sqrt{u^2\,(\varphi\,\psi' - \psi\,\varphi')^2 + \chi'^2\,(\varphi^2 + \psi^2)}$.

Dementsprechend lauten die Fundamentalgrössen:

$$E = \varphi^2 + \psi^2; \quad F = u\,(\varphi\,\varphi' + \psi\,\psi');$$

$$G = u^2\,(\varphi'^2 + \psi'^2) + \chi'^2;$$

$$L = 0; \quad M = \frac{\chi'}{D}\,(\varphi\,\psi' - \psi\,\varphi');$$

$$N = \frac{u}{D}\,[\psi\,\chi'\,\varphi'' - \varphi\,\chi'\,\psi'' + \chi''\,\varphi\,\psi' - \chi''\,\psi\,\varphi'].$$

Als Ausdrücke für das Strahlensystem ergeben sich:

$$X = \frac{\psi\,\chi'}{\varepsilon\,D}; \quad Y = -\frac{\varphi\,\chi'}{\varepsilon\,D}; \quad Z = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}};$$

oder da:

$$\varepsilon = \frac{\chi'\sqrt{\varphi^2 + \psi^2}}{u\,(\varphi\,\psi' - \psi\,\varphi')}; \tag{5.}$$

$$X = \frac{u\,\psi\,(\varphi\,\psi' - \psi\,\varphi')}{D\sqrt{\varphi^2 + \psi^2}}; \quad Y = -\frac{u\,\varphi\,(\varphi\,\psi' - \psi\,\varphi')}{D\sqrt{\varphi^2 + \psi^2}};$$

$$Z = -\frac{\chi'\sqrt{\varphi^2 + \psi^2}}{D}.$$

Die partiellen Ableitungen ergeben sich zu:

$$X_u = \frac{\psi\sqrt{\varphi^2+\psi^2}\,\chi'^2(\varphi\psi' - \psi\varphi')}{D^3},$$

$$Y_u = -\frac{\varphi\sqrt{\varphi^2+\psi^2}\,(\varphi\psi' - \psi\varphi')\chi'^2}{D^3},$$

$$Z_u = \frac{u\chi'\sqrt{\varphi^2+\psi^2}\,(\varphi\psi' - \psi\varphi')^2}{D^3},$$

$$X_v = \frac{u}{(\varphi^2+\psi^2)^{\frac{3}{2}}D^3}\Big\{D^2[\psi(\varphi\psi'' - \psi\varphi'')(\varphi^2+\psi^2) + \varphi(\varphi\psi' - \psi\varphi')^2]$$
$$- \psi(\varphi\psi' - \psi\varphi')(\varphi^2+\psi^2)[u^2(\varphi\psi' - \psi\varphi')(\varphi\psi'' - \psi\varphi'')$$
$$+ \chi'\chi''(\varphi^2+\psi^2) + \chi'^2(\varphi\varphi' + \psi\psi')]\Big\},$$

$$Y_v = \frac{u}{(\varphi^2+\psi^2)^{\frac{3}{2}}D^3}\Big\{D^2[\psi(\varphi\psi' - \psi\varphi')^2 - \varphi(\varphi\psi'' - \psi\varphi'')(\varphi^2+\psi^2)]$$
$$+ \varphi(\varphi\psi' - \psi\varphi')(\varphi^2+\psi^2)[u^2(\varphi\psi' - \psi\varphi')(\varphi\psi'' - \psi\varphi'')$$
$$+ \chi'\chi''(\varphi^2+\psi^2) + \chi'^2(\varphi\varphi' + \psi\psi')]\Big\},$$

$$Z_v = \frac{1}{(\varphi^2+\psi^2)^{\frac{1}{2}}D^3}\Big\{\chi'(\varphi^2+\psi^2)[u^2(\varphi\psi' - \psi\varphi')(\varphi\psi'' - \psi\varphi'')$$
$$+ \chi'\chi''(\varphi^2+\psi^2) + \chi'^2(\varphi\varphi' + \psi\psi')] - D^2[\chi''(\varphi^2+\psi^2)$$
$$+ \chi'(\varphi\varphi' + \psi\psi')]\Big\},$$

$$X_u Y_v - Y_u X_v = \frac{u\chi'^2(\varphi\psi' - \psi\varphi')^3}{D^4},$$

$$Y_u Z_v - Z_u Y_v = -\frac{u^2\psi\chi'(\varphi\psi' - \psi\varphi')^4}{(\varphi^2+\psi^2)D^4},$$

$$Z_u X_v - X_u Z_v = \frac{u^2\varphi\chi'(\varphi\psi' - \psi\varphi')^4}{(\varphi^2+\psi^2)D^4}.$$

Die Kummerschen Fundamentalgrössen berechnen sich zu:

$$E_0 = \frac{(\varphi^2+\psi^2)\chi'^2(\varphi\psi' - \psi\varphi')^2}{[u^2(\varphi\psi' - \psi\varphi')^2 + \chi'^2(\varphi^2+\psi^2)]^2},$$

$$F_0 = \frac{u\chi'(\varphi\psi' - \psi\varphi')}{D^4}[(\varphi^2+\psi^2)(\varphi\psi'' - \psi\varphi'')\chi'$$

$$- (\varphi^2+\psi^2)(\varphi\psi' - \psi\varphi')\chi'' - (\varphi\psi' - \psi\varphi')(\varphi\varphi' + \psi\psi')\chi'],$$

$$G_0 = \frac{1}{(\varphi^2+\psi^2)^2 D^4}\Big\{u^2 D^2[(\varphi^2+\psi^2)^2(\varphi\psi'' - \psi\varphi'')^2 + (\varphi\psi' - \psi\varphi')^2]$$

$$+ (\varphi^2+\psi^2) D^2[\chi''(\varphi^2+\psi^2) + \chi'(\varphi\varphi' + \psi\psi')]^2 - (\varphi^2+\psi^2)^2$$

$$\cdot [u^2(\varphi\psi' - \psi\varphi')(\varphi\psi'' - \psi\varphi'') + \chi'\chi''(\varphi^2+\psi^2) + \chi'^2(\varphi\varphi' + \psi\psi')]^2\Big\}.$$

$$D_0 = D' = 0,$$

$$D_1' = -\frac{u(\varphi\psi' - \psi\varphi')^2}{D\sqrt{\varphi^2+\psi^2}},$$

$$D'' = -\frac{u^2(\varphi\varphi' + \psi\psi')(\varphi\psi' - \psi\varphi')^2}{D(\varphi^2+\psi^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$E_0 G_0 - F_0^2 = (X_u^2 + Y_u^2 + Z_u^2)(X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2)$$

$$- (X_u X_v + Y_u Y_v + Z_u Z_v)$$

$$= (X_u Y_v - Y_u X_v)^2 + (Y_u Z_v - Z_u Y_v)^2 + (Z_u X_v - X_u Z_v)^2,$$

$$E_0 G_0 - F_0^2 = \frac{u^2\chi'^2(\varphi\psi' - \psi\varphi')^6}{D^6(\varphi^2+\psi^2)}.$$

Die Gleichung (§ 6) für die Abszissen der Brennpunkte vereinfacht sich zu:

$$\varrho^2(E_0 G_0 - F_0^2) - \varrho(D'' E_0 - D_1' F_0) = 0,$$

$$\varrho_1 = 0; \qquad \varrho_2 = \frac{D'' E_0 - D_1' F_0}{E_0 G_0 - F_0^2},$$

$$D'' E_0 - D_1' F_0 = \frac{u^2\chi'(\varphi\psi' - \psi\varphi')^3}{D^5\sqrt{\varphi^2+\psi^2}}\Big\{\chi'(\varphi\psi'' - \psi\varphi'')(\varphi^2+\psi^2)$$

$$- \chi''(\varphi^2+\psi^2)(\varphi\psi' - \psi\varphi') - 2\chi'(\varphi\varphi' + \psi\psi')(\varphi\psi' - \psi\varphi')\Big\},$$

$$D'' E_0 - D_1' F_0 = \frac{u^2\chi'(\varphi\psi' - \psi\varphi')^3}{D^5(\varphi^2+\psi^2)}\Phi(v),$$

wenn

$$\Phi(v) = \chi'(\varphi\psi'' - \psi\varphi'')(\varphi^2 + \psi^2) - \chi'(\varphi^2 + \psi^2)(\varphi\psi' - \psi\varphi') - 2\chi'(\varphi\varphi' + \psi\psi')(\varphi\psi' - \psi\varphi'). \tag{6.}$$

Also

$$\varrho_2 = \frac{D\,\Phi(v)}{\chi'(\varphi\psi' - \psi\varphi')^3}. \tag{7.}$$

Die Gleichungen des Strahlensystems lauten demnach:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= u\,\varphi(v) + \frac{u\,\psi(\varphi\psi' - \psi\varphi')}{D\sqrt{\varphi^2 + \psi^2}}\,t_0, \\ \eta &= u\,\psi(v) - \frac{u\,\varphi(\varphi\psi' - \psi\varphi')}{D\sqrt{\varphi^2 + \psi^2}}\,t_0, \\ \zeta &= \chi(v) - \frac{\chi'\sqrt{\varphi^2 + \psi^2}}{D}\,t_0. \end{aligned}\right\} \tag{8.}$$

Aus Gleichung (5.) ergibt sich u als:

$$u = \frac{\chi'\sqrt{\varphi^2 + \psi^2}}{\varepsilon(\varphi\psi' - \psi\varphi')}. \tag{9.}$$

Setzt man diesen Wert in (8.) ein, so ergibt sich für die Böschungsfläche (ε = konst.):

$$\xi = \frac{\varphi\chi'\sqrt{\varphi^2 + \psi^2}}{\varepsilon(\varphi\psi' - \psi\varphi')} + \frac{\psi\chi' t_0}{\varepsilon D},$$

oder da:

$$D^2 = \chi'^2(\varphi^2 + \psi^2) + u^2(\varphi\psi' - \psi\varphi')^2 = \chi'^2(\varphi^2 + \psi^2)\frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon^2},$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{\varphi\chi'\sqrt{\varphi^2 + \psi^2}}{\varepsilon(\varphi\psi' - \psi\varphi')} + \frac{\psi t_0}{\chi'(\varphi^2 + \psi^2)\sqrt{1 + \varepsilon^2}}, \\ \eta &= \frac{\psi\chi'\sqrt{\varphi^2 + \psi^2}}{\varepsilon(\varphi\psi' - \psi\varphi')} - \frac{\varphi t_0}{(\varphi^2 + \psi^2)\sqrt{1 + \varepsilon^2}}, \\ \zeta &= \chi - \frac{\chi'\varepsilon t_0}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{10.}$$

Setzen wir in Gleichung (8.) $v = \text{konst.}$, so erhalten wir die Regelflächen längs der Niveaulinien.

Wenn wir in (8.) t_0 durch ϱ_2 ersetzen, erhalten wir die Gleichungen der zweiten Brennfläche:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= u\varphi + \frac{u\psi\Phi}{\chi'(\varphi\psi' - \psi\varphi')^2\sqrt{\varphi^2+\psi^2}}, \\ \eta &= u\psi - \frac{u\varphi\Phi}{\chi'(\varphi\psi' - \psi\varphi')^2\sqrt{\varphi^2+\psi^2}}, \\ \zeta &= \chi - \frac{\sqrt{\varphi^2+\psi^2}\,\Phi}{(\varphi\psi' - \psi\varphi')^3}. \end{aligned}\right\} \qquad (11.)$$

Bei der zweiten Brennfläche hängt also ζ — ebenso wie bei der ersten (4.) — nur von dem Parameter v ab; wir haben daher den Satz: Das System der Böschungsstrahlen gerader Konoide mit horizontaler Richtebene hat als zweiten Brennmantel eine gleichartige Fläche.

Da die Geraden auf diesen Flächen Asymptotenlinien sind, diese sich daher gegenseitig entsprechen, so ist das vorliegende System ein W-System. Durch Elimination von u (21.) ergibt sich für die Gratlinie der Böschungsfläche:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{\varphi\chi'\sqrt{\varphi^2+\psi^2}}{\varepsilon(\varphi\psi' - \psi\varphi')} + \frac{\psi\Phi}{(\varphi\psi' - \psi\varphi')^3}, \\ \eta &= \frac{\psi\chi'\sqrt{\varphi^2+\psi^2}}{\varepsilon(\varphi\psi' - \psi\varphi')} - \frac{\varphi\Phi}{(\varphi\psi' - \psi\varphi')^3}, \\ \zeta &= \chi - \frac{\sqrt{\varphi^2+\psi^2}\,\Phi}{(\varphi\psi' - \psi\varphi')^3}, \end{aligned}\right\} \qquad (12.)$$

wenn ε konstant ist.

Als Beispiel wählen wir das orthogonale hyperbolische Paraboloid, bei dem ja die beiden Scharen von Geraden je einer Ebene parallel sind. Wir legen deshalb das Paraboloid so, dass die eine Schar der Geraden parallel der xy-Ebene ist. Zur Aufstellung der Gleichung denken wir uns das hyperbolische

Paraboloid durch eine längs dreier festen, zu jener Ebene parallelen Geraden fortbewegten Linie erzeugt. Die Geraden mögen die Gleichungen haben:

$$1.\quad x = 0; \qquad z = b; \tag{13.}$$
$$2.\quad y = 0; \qquad z = a; \tag{14.}$$
$$3.\quad x = my; \qquad z = 0. \tag{15.}$$

Dann sind die Gleichungen einer die beiden ersten schneidenden Geraden:

$$x = \lambda(z - b); \qquad y = \mu(z - a); \tag{16.}$$

da diese ferner die dritte Gerade schneidet, so folgt:

$$\lambda = -\frac{my}{b}; \qquad y = -\mu a;$$

oder nach Einsetzen von y:

$$\lambda = \frac{m\mu a}{b}.$$

Eliminieren wir aus dieser und aus den Gleichungen (16.) λ und μ, so erhalten wir als Gleichung des hyperbolischen Paraboloids:

$$b\,x(z - a) = a\,m(z - b)\,y.$$

Diese geht, wenn wir zur Abkürzung $c = \frac{am}{b}$ setzen, schliesslich über in:

$$x(z - a) = c\,y(z - b).$$

Die partiellen Ableitungen ergeben folgende Werte:

$$p = -\frac{z - a}{x - cy}; \qquad q = \frac{c(z - b)}{x - cy};$$

$$r = \frac{2(z - a)}{(x - cy)^2}; \quad s = -\frac{c(z - a) + c(z - b)}{(x - cy)^2}; \quad t = \frac{2c^2(z - b)}{(x - cy)^2};$$

$$p^2 + q^2 = \varepsilon^2 = \frac{(z - a)^2 + c^2(z - b)^2}{(x - cy)^2} = \frac{W}{(x - cy)^2};$$

$$x - cy = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{W}.$$

x und y drücken sich als Funktionen von z demnach so aus:

$$x = \frac{z-b}{a-b} \cdot \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{W}; \qquad y = \frac{z-a}{a-b} \cdot \frac{1}{c\,\varepsilon}\sqrt{W}.$$

Der Ausdruck $\frac{r+t}{rt-s^2}$ berechnet sich zu:

$$\frac{r+t}{rt-s^2} = -2\,\frac{z-a+c^2(z-b)}{c^2\varepsilon^2(a-b)^2}\,W.$$

Die Gleichungen der zweiten Brennfläche (§ 9) gehen daher über in:

$$\xi = \frac{\sqrt{W}}{\varepsilon\,c^2(a-b)^2}\Big\{c^2(z-b)(a-b) - 2(z-a)[z-a+c^2(z-b)]\Big\},$$

$$\eta = \frac{\sqrt{W}}{\varepsilon\,c\,(a-b)^2}\Big\{(z-a)(a-b) + 2(z-b)[(z-a)+c^2(z-b)]\Big\},$$

$$\zeta = z + 2W\frac{z-a+c^2(z-b)}{c^2(a-b)^2}.$$

Wir sehen also bestätigt, dass die zweite Brennfläche eine Regelfläche ist, deren Gerade Niveaulinien sind.

§ 10. Strahlensystem von Minimalflächen.

Die Minimalflächen gehören mit zu den Flächen, für die unser Strahlensystem einfachere analytische Form annimmt. Wir werden ihnen daher ebenfalls einen Abschnitt widmen.

Die Minimalflächen genügen der Differentialgleichung:

$$(1+q^2)\,r - 2\,p\,q\,s + (1+p^2)\,t = 0. \qquad (1.)$$

Diese führt in den Gleichungen der zweiten Brennfläche (§ 5) eine wesentliche Vereinfachung herbei:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - \frac{\varepsilon^2+1}{\varepsilon^2}\,\frac{p\,(r+t)}{rt-s^2}, \\ \eta &= y - \frac{\varepsilon^2+1}{\varepsilon^2}\,\frac{q\,(r+t)}{rt-s^2}, \\ \zeta &= z - (\varepsilon^2+1)\,\frac{r+t}{rt-s^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.)$$

Zur weiteren Betrachtung bedienen wir uns der Parameterdarstellung der Minimalflächen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\int (1-u^2)\,F(u)\,du + \frac{1}{2}\int (1-v^2)\,\Phi(v)\,dv\,, \\ y &= \frac{i}{2}\int (1+u^2)\,F(u)\,du - \frac{i}{2}\int (1+v^2)\,\Phi(v)\,dv\,, \\ z &= \int u\,F(u)\,du + \int v\,\Phi(v)\,dv\,. \end{aligned}\right\} \quad (3.)$$

Die partiellen Ableitungen sind:

$$x_u = \frac{1}{2}(1-u^2)\,F(u); \qquad x_v = \frac{1}{2}(1-v^2)\,\Phi(v);$$

$$y_u = \frac{i}{2}(1+u^2)\,F(u); \qquad y_v = -\frac{i}{2}(1+v^2)\,\Phi(v);$$

$$z_u = u\,F(u); \qquad z_v = v\,\Phi(v).$$

Daher sind die Richtungscosinus der Flächennormalen:

$$a = \frac{u+v}{1+uv}; \qquad b = \frac{i(v-u)}{1+uv}; \qquad c = \frac{uv-1}{1+uv}.$$

Die Fundamentalgrössen ergeben:

$$E = G = 0; \quad F = \frac{1}{2}(1+uv)^2\,F(u)\,\Phi(v);$$

$$L = -F(u); \quad M = 0; \quad N = -\Phi(v).$$

Für das Strahlensystem ist:

$$\varepsilon = \frac{2\sqrt{uv}}{uv-1}. \qquad (4.)$$

$$X = \frac{u+v}{1+uv}\cdot\frac{uv-1}{2\sqrt{uv}}; \qquad Y = \frac{i(v-u)(uv-1)}{(1+uv)\cdot 2\sqrt{uv}};$$

$$Z = -\frac{2\sqrt{uv}}{uv+1}.$$

$$X_u = \frac{(1-v^2)}{(1+uv)^2} \cdot \frac{uv-1}{2\sqrt{uv}} + \frac{(u+v)\,v}{4\,(uv)^{\frac{3}{2}}};$$

$$X_v = \frac{(1-u^2)}{(1+uv)^2} \cdot \frac{uv-1}{2\sqrt{uv}} + \frac{u\,(u+v)}{4\,(uv)^{\frac{3}{2}}};$$

$$Y_u = -\frac{(1+v^2)}{(1+uv)^2} \cdot \frac{uv-1}{2\sqrt{uv}} \cdot i - iv\frac{u-v}{4\,(uv)^{\frac{3}{2}}};$$

$$Y_v = \frac{1+u^2}{(1+uv)^2} \cdot \frac{uv-1}{2\sqrt{uv}} \cdot i - iu\frac{u-v}{4\,(uv)^{\frac{3}{2}}};$$

$$Z_u = \frac{v\,(uv-1)}{(1+uv)^2\sqrt{uv}}; \quad Z_v = \frac{u\,(uv-1)}{(1+uv)^2\sqrt{uv}};$$

$$E_0 = \frac{1}{4u^2} - \frac{(uv-1)^2}{2\,(1+uv)^2\,u^2};$$

$$F_0 = \frac{1}{4uv};$$

$$G_0 = \frac{1}{4v^2} - \frac{(uv-1)^2}{2\,(1+uv)^2\,v^2};$$

$$E_0 G_0 - F_0^{\,2} = -\frac{(uv-1)^2}{uv(1+uv)^4};$$

$$D = -\frac{F\cdot(uv-1)}{4\sqrt{uv}};$$

$$D' = \frac{\Phi\cdot v^2\,(uv-1)}{4\,(uv)^{\frac{3}{2}}};$$

$$D_1' = \frac{F\cdot(uv-1)\,u^2}{4\,(uv)^{\frac{3}{2}}};$$

$$D'' = -\frac{\Phi\cdot(uv-1)}{4\sqrt{uv}};$$

$$D\,D'' - D'\,D_1' = 0;$$

$$D''\,E_0 - (D' + D_1')\,F_0 + D\,G_0 = -\frac{(u^2 F + v^2 \Phi)\,(uv-1)}{2\,(uv)^{\frac{3}{2}}\,(uv+1)^2}.$$

Demnach ergeben sich die Abszissen der Brennpunkte als:

$$\varrho_1 = 0;$$

$$\varrho_2 = \frac{u^2 F + v^2 \Phi}{2\sqrt{uv}\,(uv-1)}(uv+1)^2.$$

Die Gleichungen des Strahlensystems sind also:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{2}\int (1-u^2) F\,du + \frac{1}{2}\int (1-v^2)\,\Phi\,dv + \frac{(u+v)(uv-1)}{2\sqrt{uv}\,(1+uv)}\,t_0,\\
\eta &= \frac{i}{2}\int (1+u^2) F\,du - \frac{i}{2}\int (1+v^2)\,\Phi\,dv + \frac{i(v-u)(uv-1)}{2\sqrt{uv}\,(1+uv)}\,t_0,\\
\zeta &= \int u F\,du + \int v\,\Phi\,dv - \frac{2\sqrt{uv}}{uv+1}\,t_0.
\end{aligned}\right\} \quad (5.)$$

Berechnet man aus (4.) u oder v und setzt es in diese Gleichungen ein, so ergibt $\varepsilon = \text{konst.}$ die Böschungsfläche.

Ersetzt man t_0 durch ϱ_2, so ergibt sich für die zweite Brennfläche:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{2}\int (1-u^2) F\,du + \frac{1}{2}\int (1-v^2)\,\Phi\,dv + \frac{(u+v)(1+uv)(u^2F+v^2\Phi)}{4uv},\\
\eta &= \frac{i}{2}\int (1+u^2) F\,du - \frac{i}{2}\int (1+v^2)\,\Phi\,dv + \frac{i(u-v)(1+uv)(u^2F+v^2\Phi)}{4uv},\\
\zeta &= \int u F\,du + \int v\,\Phi\,dv - \frac{1+uv}{uv-1}(u^2F+v^2\Phi).
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6.)$$

Als Beispiel wählen wir die Scherk'sche Minimalfläche. Sie stellt sich dar[1]) durch:

$$z = \log\cos y - \log\cos x; \qquad (7.)$$

oder:

$$x = u; \quad y = v; \quad z = \log\cos v - \log\cos u. \qquad (8.)$$

---

1) Scheffers: Einführung in die Theorie der Flächen. Leipzig 1902. Seite 253.

Die partiellen Ableitungen berechnen sich nach (7.) als:

$$p = \frac{\sin x}{\cos x} = tg\, x; \qquad q = -\frac{\sin y}{\cos y} = -tg\, y;$$

$$p^2 + q^2 = \varepsilon^2 = tg^2 x + tg^2 y; \tag{9.}$$

$$r = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad s = 0; \quad t = -\frac{1}{\cos^2 y};$$

$$\frac{r+t}{rt - s^2} = \cos^2 x - \cos^2 y.$$

Als Richtungscosinus der Böschungsstrahlen ergeben sich:

$$X = -\frac{tg\, x}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2+1}}; \qquad Y = \frac{tg\, y}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2+1}}; \qquad Z = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+1}}.$$

Die Gleichungen der Böschungsfläche lauten:

$$\xi = x - \frac{tg\, x}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2+1}}\, t_0; \qquad \eta = y + \frac{tg\, y}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2+1}}\, t_0;$$

$$\zeta = z - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+1}}\, t_0;$$

oder, da nach (9.):

$$u = \operatorname{arc} tg \sqrt{\varepsilon^2 - tg^2 v}; \tag{10.}$$

und in Hinblick auf (8.):

$$\xi = \operatorname{arc} tg \sqrt{\varepsilon^2 - tg^2 v} - \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - tg^2 v}}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2+1}}\, t_0;$$

$$\eta = v + \frac{tg\, v}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2+1}}\, t_0;$$

$$\zeta = \lg \cos v - \log \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 tg^2 v}} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+1}}\, t_0.$$

Die Gleichungen (2.) für die zweite Brennfläche gehen über in:

$$\xi = u - \frac{tg^2 u + tg^2 v + 1}{tg^2 u + tg^2 v} (\cos^2 u - \cos^2 v) tg\, u;$$

$$\eta = v + \frac{tg^2 u + tg^2 v + 1}{tg^2 u + tg^2 v} (\cos^2 u - \cos^2 v) tg\, v);$$

$$\zeta = \log \cos v - \log \cos u - (\cos^2 u - \cos^2 v)(tg^2 u + tg^2 v + 1).$$

Eliminieren wir u mittels Gleichung (10.), so erhalten wir für $\varepsilon =$ konst. die Gleichungen der Gratlinie der Böschungsfläche.

Nachdem wir uns in den ersten beiden Kapiteln mit dem System der Böschungsstrahlen beschäftigt haben, werden wir im letzten Kapitel besondere Böschungsflächen, nämlich solche an Flächen zweiten Grades, betrachten.

III. Kapitel.

Böschungsflächen von Flächen zweiten Grades.

§ 11. Ellipsoid.

Nehmen wir als Gleichung des Ellipsoids:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1.}$$

so ergeben sich die partiellen Ableitungen als:

$$p=-\frac{c^2 x}{a^2 z}; \qquad q=-\frac{c^2 y}{b^2 z}; \tag{2.}$$

$$r=\frac{(y^2-b^2)\,c^4}{a^2 b^2 z^3}; \qquad s=-\frac{c^4 x y}{a^2 b^2 z^3}; \qquad t=\frac{(x^2-a^2)\,c^4}{a^2 b^2 z^3} \tag{3.}$$

Wir setzen ferner $a>b>c$ voraus.

Die Gleichung $p^2+q^2=\varepsilon^2$ geht über in:

$$\frac{c^4 x^2}{a^4 z^2}+\frac{c^4 y^2}{b^4 z^2}=\varepsilon^2. \tag{4.}$$

Die Gleichungen (1.) und (4.) stellen die Isophote dar. Ihre Projektionen auf die Koordinatenebenen erhalten wir als:

$$x=\pm\frac{a^2}{c^2}\sqrt{\frac{c^4-(c^2+\varepsilon^2 b^2)\,z^2}{a^2-b^2}}, \tag{5.}$$

$$y=\pm\frac{b^2}{c^2}\sqrt{\frac{c^4-(c^2+\varepsilon^2 a^2)\,z^2}{b^2-a^2}}, \tag{6.}$$

$$\frac{x^2}{a^4\varepsilon^2}(a^2\varepsilon^2+c^2)+\frac{y^2}{b^4\varepsilon^2}(b^2\varepsilon^2+c^2)=1. \tag{7.}$$

Die Gleichung (7.) stellt eine Ellipse dar, die den Koordinatenanfang als Mittelpunkt hat und deren Achsen mit den entsprechenden Koordinatenachsen zusammenfallen.

Die Gleichung der Böschungsfläche erhalten wir durch Einsetzen der Ausdrücke für p, q, x, y in die Gleichung (3.) § 4:

$$\xi = \pm \sqrt{\frac{c^4 - (c^2 + \varepsilon^2 b^2) z^2}{a^2 - b^2}} \cdot \frac{a^2 z \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 + 1} + c^2 t_0}{c^2 z \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 + 1}};$$

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{c^4 - (c^2 + \varepsilon^2 a^2) z^2}{b^2 - a^2}} \cdot \frac{b^2 z \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 + 1} + c^2 t_0}{c^2 z \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 + 1}};$$

$$\zeta = z - \frac{t_0 \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + 1}}.$$

Eine Elimination beider Parameter ist nicht möglich. Dagegen erhalten wir für die Spur in der $\xi\eta$-Ebene einen einfachen Ausdruck. Aus $\zeta = 0$ folgt:

$$t_0 = \frac{z \sqrt{\varepsilon^2 + 1}}{\varepsilon}.$$

Setze diesen Wert in ξ und η ein:

$$\xi = \sqrt{\frac{c^4 - (c^2 + \varepsilon^2 b^2) z^2}{a^2 - b^2}} \cdot \frac{a^2 \varepsilon^2 + c^2}{c^2 \varepsilon^2};$$

$$\eta = \sqrt{\frac{c^4 - (c^2 + \varepsilon^2 a^2) z^2}{b^2 - a^2}} \cdot \frac{b^2 \varepsilon^2 + c^2}{c^2 \varepsilon^2}.$$

Aus beiden Gleichungen lässt sich z eliminieren:

$$(c^2 + \varepsilon^2 b^2) z^2 = c^4 - \frac{\xi^2 c^4 \varepsilon^4 (a^2 - b^2)}{(a^2 \varepsilon^2 + c^2)^2};$$

$$(c^2 + \varepsilon^2 a^2) z^2 = c^4 + \frac{\eta^2 c^4 \varepsilon^4 (a^2 - b^2)}{(b^2 \varepsilon^2 + c^2)^2}.$$

Wir erhalten schliesslich:

$$\frac{\xi^2}{a^2 + \frac{c^2}{\varepsilon^2}} + \frac{\eta^2}{b^2 + \frac{c^2}{\varepsilon^2}} = 1. \qquad (8.)$$

Die Spur der Böschungsfläche des Ellipsoids in der $\xi\eta$-Ebene ist eine Ellipse mit den Halbachsen:

$$\alpha = \sqrt{a^2 + \frac{c^2}{\varepsilon^2}}; \qquad \beta = \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{\varepsilon^2}}. \tag{9.}$$

Hieraus folgt:

$$\alpha^2 - \beta^2 = a^2 - b^2 = \text{konstant};$$

somit haben wir den

Satz A.: Die Spuren der Böschungsflächen eines Ellipsoids in der $\zeta\eta$-Ebene sind Ellipsen, die konfokal sind zu der Ellipse, in der das Ellipsoid von jener Ebene geschnitten wird.

Die Halbachsen a und b dieser letzteren stehen zu denen der durch die Gleichungen (7.) und (8.) dargestellten Ellipsen in einem einfachen Verhältnis. Bezeichnen wir die Halbachsen der Ellipse (7.) mit α_1 und β_1, so gilt:

$$\alpha_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + \frac{c^2}{\varepsilon^2}}}; \qquad \beta_1 = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + \frac{c^2}{\varepsilon^2}}};$$

oder in Hinsicht auf (9.):

$$\alpha \cdot \alpha_1 = a^2; \qquad \beta \cdot \beta_1 = b^2.$$

Dies gibt den

Satz B.: Die Halbachsen der Schnittkurve des Ellipsoids mit der xy-Ebene sind mittlere Proportionale zu denen der Projektion der Isophote auf die xy-Ebene und denen der Schnittkurve der Böschungsfläche mit der $\xi\eta$-Ebene.

Die Böschungsfläche des Ellipsoids zerfällt in zwei Mäntel, der eine berührt das Ellipsoid nur oberhalb der $\xi\eta$-Ebene, der andere nur unterhalb. Beide schneiden sich längs der Spur $\zeta = 0$.

Nach einiger Rechnung findet man:

$$\frac{p^2 r + 2pqs + q^2 t}{rt - s^2} = z - \frac{(c^2 + \varepsilon^2 a^2)(c^2 + \varepsilon^2 b^2)}{c^6} z^3.$$

Damit lauten die Gleichungen der Gratlinie der Böschungsfläche ($\varepsilon =$ konst.):

$$\xi = \pm \frac{a^2}{c^2}\sqrt{\frac{c^4-(c^2+\varepsilon^2 b^2)z^2}{a^2-b^2}}\left\{1+\frac{c^2}{a^2\varepsilon^2}-\frac{(c^2+\varepsilon^2 a^2)(c^2+\varepsilon^2 b^2)}{a^2 c^4 \varepsilon^2}\right\}$$

$$\eta = \pm \frac{b^2}{c^2}\sqrt{\frac{c^4-(c^2+\varepsilon^2 a^2)z^2}{b^2-a^2}}\left\{1+\frac{c^2}{b^2\varepsilon^2}-\frac{(c^2+\varepsilon^2 a^2)(c^2+\varepsilon^2 b^2)}{b^2 c^4 \varepsilon^2}\right\}$$

$$\zeta = \frac{(c^2+\varepsilon^2 a^2)(c^2+\varepsilon^2 b^2)}{c^6} z^3. \qquad (10.)$$

Aus diesen Gleichungen können wir den Parameter z eliminieren. Wir verfahren folgendermassen:

$$\left.\begin{aligned} \xi \frac{c^6\sqrt{a^2-b^2}\varepsilon^2}{a^2\varepsilon^2+c^2} &= [c^4-(c^2+\varepsilon^2 b^2)z^2]^{\frac{3}{2}}, \\ \eta \frac{c^6\sqrt{b^2-a^2}\varepsilon^2}{b^2\varepsilon^2+c^2} &= [c^4-(c^2+\varepsilon^2 a^2)z^2]^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (11.)$$

Hieraus folgt als Projektion der Gratlinie auf die $\xi\eta$-Ebene:

$$\left(\frac{\xi\sqrt{a^2+\frac{c^2}{\varepsilon^2}}}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\eta\sqrt{b^2+\frac{c^2}{\varepsilon^2}}}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1. \qquad (12.)$$

Diese Gleichung stellt die Evolute der Ellipse:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

dar, wenn

$$\alpha=\sqrt{\frac{c^2}{\varepsilon^2}+a^2} \text{ und } \beta=\sqrt{\frac{c^2}{\varepsilon^2}+b^2}$$

gesetzt wird; sie ist also, wie es sein muss, identisch mit der durch Gleichung (8.) dargestellten Ellipse.

Aus der dritten Gleichung von (10.) berechnet sich:

$$z^2=\frac{c^4\zeta^{\frac{2}{3}}}{(c^2+\varepsilon^2 a^2)^{\frac{2}{3}}(c^2+\varepsilon^2 b^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

Die Gleichungen (11.) gehen damit über in:

$$\left(\frac{\xi\,\varepsilon^2\sqrt{a^2-b^2}}{a^2\,\varepsilon^2+c^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\zeta\sqrt{c^2+\varepsilon^2 b^2}}{a^2\,\varepsilon^2+c^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1. \qquad (13.)$$

$$\left(\frac{\zeta\sqrt{c^2+\varepsilon^2 a^2}}{b^2\,\varepsilon^2+c^2}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{\eta\,\varepsilon^2\sqrt{a^2-b^2}}{b^2\,\varepsilon^2+c^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1. \qquad (14.)$$

Diese beiden Projektionen stellen die Evolute einer Ellipse resp. einer Hyperbel dar.

Für $\varepsilon=\infty$ geht die Böschungsfläche in einen elliptischen Zylinder über, dessen Querschnitt man als Schnitt des Ellipsoids mit der Ebene $z=0$ erhält.

§ 12. Das einschalige Hyperboloid.

Legen wir unseren Betrachtungen die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (1.)$$

zu Grunde, so können wir die im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln übernehmen, wenn wir c^2 durch $(-c^2)$ ersetzen.

Dementsprechend erhalten wir als Isophote, dargestellt durch ihre Projektionen auf die Koordinatenebenen:

$$x=\mp\frac{a^2}{c^2}\sqrt{\frac{c^4+(c^2-\varepsilon^2 b^2)z^2}{a^2-b^2}}, \qquad (2.)$$

$$y=\mp\frac{b^2}{c^2}\sqrt{\frac{c^4+(c^2-\varepsilon^2 a^2)z^2}{b^2-a^2}}, \qquad (3.)$$

$$\frac{x^2}{a^4}\left(a^2-\frac{c^2}{\varepsilon^2}\right)+\frac{y^2}{b^4}\left(b^2-\frac{c^2}{\varepsilon^2}\right)=1. \qquad (4.)$$

Die Gleichungen der Böschungsfläche lauten:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \mp\sqrt{\frac{c^4+(c^2-\varepsilon^2 b^2)z^2}{a^2-b^2}}\;\frac{c^2 t_0 - a^2 z\,\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2+1}}{c^2 z\,\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2+1}}, \\ \eta &= \mp\sqrt{\frac{c^4+(c^2-\varepsilon^2 a^2)z^2}{b^2-a^2}}\;\frac{c^2 t_0 - b^2 z\,\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2+1}}{c^2 z\,\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2+1}}, \\ \zeta &= z - \frac{t_0\,\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+1}}. \end{aligned}\right\} \quad (5.)$$

Ihre Spur in der $\xi\eta$-Ebene stellt sich dar durch:

$$\frac{\xi^2}{a^2-\frac{c^2}{\varepsilon^2}} + \frac{\eta^2}{b^2-\frac{c^2}{\varepsilon^2}} = 1. \quad (6.)$$

Die Projektionen der Gratlinie der Böschungsfläche auf die Koordinatenebenen sind:

$$\left(\frac{\xi\,\varepsilon^2\sqrt{a^2-b^2}}{a^2\varepsilon^2-c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\zeta\sqrt{b^2\varepsilon^2-c^2}}{a^2\varepsilon^2-c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad (7.)$$

$$\left(\frac{\zeta\sqrt{\varepsilon^2 a^2-c^2}}{b^2\varepsilon^2-c^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\eta\,\varepsilon^2\sqrt{a^2-b^2}}{b^2\varepsilon^2+c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad (8.)$$

$$\left(\frac{\xi\sqrt{a^2\varepsilon^2-c^2}}{(a^2-b^2)\,\varepsilon}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta\sqrt{b^2\varepsilon^2-c^2}}{(a^2-b^2)\,\varepsilon}\right)^{\frac{2}{3}} = 1. \quad (9.)$$

Wir nehmen $a > b$ an und unterscheiden bei der Diskussion der oben entwickelten Gleichungen im Gegensatz zum Ellipsoid 5 Fälle.

I. $\varepsilon > \frac{c}{b}$ oder $c^2 < \varepsilon^2 b^2$.

Die Projektion der Isophote auf die xy-Ebene ist eine Ellipse.

Die Spur der Böschungsfläche in der Ebene $\zeta = 0$ ist eine Ellipse, die konfokal ist zu der Ellipse, die man als Schnitt des Hyperboloids mit der xy-Ebene erhält. Also gilt Satz A des vorigen Paragraphen. Ebenfalls gilt, wie man aus den Gleichungen (1.), (4.) und (6.) ersieht, auch Satz B.

Die Projektion der Gratlinie auf die $\xi\zeta$-Ebene ergibt die Evolute einer Ellipse und die auf die $\eta\zeta$-Ebene die einer Hyperbel. Die dritte Projektion ist Evolute der durch Gleichung (6.) dargestellten Ellipse.

$$\text{II.}\quad \varepsilon = \frac{c}{b} \text{ oder } c^2 = \varepsilon^2 b^2.$$

Die Gleichungen der Isophote (3.) und (4.) gehen über in:

$$x = \mp \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

$$\frac{z^2 (a^2 - b^2)}{b^2 c^2} - \frac{y^2 (a^2 - b^2)}{b^2} = 1.$$

Jeder Zweig stellt also eine Hyperbel dar in einer Ebene, die in der Leitlinie der Kehlellipse auf der xy-Ebene senkrecht steht.

Die Gleichungen der Böschungsfläche (5.) nehmen folgende Gestalt an:

$$\xi = \sqrt{a^2 - b^2}\ \frac{c^2 t_0 - a^2 z \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 + 1}}{z \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 + 1}}, \tag{10.}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{c^4 + \varepsilon^2 (b^2 - a^2) z^2}{b^2 - a^2}} \cdot \frac{c^2 t_0 - b^2 z \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 + 1}}{c^2 z \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 + 1}}, \tag{11.}$$

$$\zeta = z - \frac{t_0 \cdot \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + 1}}. \tag{12.}$$

Hieraus lassen sich die Parameter t_0 und z eliminieren. Aus (10.) und (12.) berechnen sich t_0 und z_0 als:

$$t_0 = \frac{\left(\sqrt{a^2 - b^2}\,\xi + a^2\right) \zeta \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 + 1}}{c^2 - \left(\sqrt{a^2 - b^2}\,\xi + a^2\right) \varepsilon^2},$$

$$z = \frac{c^2 \zeta}{c^2 - \left(\sqrt{a^2 - b^2}\,\xi + a^2\right) \varepsilon^2}.$$

Setzen wir diese Werte in (11.) ein, so erhalten wir schliesslich:

$$\frac{\left(\xi \mp \sqrt{a^2 - b^2}\right)^2}{b^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} = 0,$$

die Gleichung eines Kreiskegels, dessen Spitze die Koordinaten:

$$\xi = \pm\sqrt{a^2 - b^2}; \quad \eta = \zeta = 0$$

hat und dessen Achse der z-Achse parallel ist.

Die Böschungsfläche artet also für $\varepsilon = \frac{c}{b}$ in zwei Kreiskegel aus, deren Spitzen in den Brennpunkten der Kehlellipse liegen und deren Achsen Scheiteltangenten der Fokalhyperbeln der gegebenen Fläche sind.[1])

Wir können das Ergebnis noch auf folgende Weise aussprechen:

Errichtet man in den Brennpunkten der Kehlellipse eines einschaligen Hyperboloids mit den Achsen a, b, c Kreiskegel, deren Achsen senkrecht zur Ebene der Kehlellipse stehen und deren Öffnungswinkel α sich bestimmt durch die Gleichung $tg\,\alpha = b : c$, so berühren diese Kreiskegel die Fläche in Hyperbeln, deren Ebenen in den Leitlinien der Kehlellipse auf der xy-Ebene senkrecht stehen.

III. $$\frac{c}{b} > \varepsilon > \frac{c}{a},$$

oder $$a^2\varepsilon^2 < c < b^2\varepsilon^2.$$

Die Projektion der Isophote auf die xy-Ebene ist eine Hyperbel.

Die Spur der Böschungsfläche in der Ebene $\zeta = 0$ ist eine Hyperbel:

$$\frac{\xi^2}{a^2 - \frac{c^2}{\varepsilon^2}} - \frac{\eta^2}{\frac{c^2}{\varepsilon^2} - b^2} = 1, \qquad (13.)$$

---

1) O. Staude: Analytische Geometrie. Leipzig 1910. Bd. 1, Seite 289; Bd. 2, Seite 674 § 122, 8 II.

Salmon-Fiedler: Analyt. Geometrie d. Raumes I. Leipzig 1873. Seite 227.

sie ist konfokal zu der Ellipse, die man als Hauptschnitt des Hyperboloids mit der xy-Ebene erhält. Bei variablem ε erhält man konfokale Hyperbeln. Es gilt also hier ein dem Satze A (§ 11) entsprechender. Ebenso behält Satz B seine Gültigkeit.

Die Projektion der Gratlinie auf die $\xi\,\eta$-Ebene

$$\left(\frac{\xi\sqrt{a^2\varepsilon^2-c^2}}{(a^2-b^2)\,\varepsilon}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{\eta\sqrt{c^2\varepsilon^2-b^2}}{(a^2-b^2)\,\varepsilon}\right)^{\frac{2}{3}}=1,$$

ist Evolute zu der durch Gleichung (13.) dargestellten Hyperbel.

Die anderen beiden Projektionen sind ebenfalls Evoluten von Hyperbeln.

IV. $c\lessgtr\frac{\varepsilon}{a}$ oder $c^2\lessgtr\varepsilon^2\,a^2$.

In diesem Falle wird die Böschungsfläche imaginär.

V. $\varepsilon=\infty$.

Man erhält als Böschungsfläche einen elliptischen Zylinder, dessen Querschnitt die Kehlellipse ist.

§ 13. Das zweischalige Hyperboloid.

Das Hyperboloid habe die Gleichung:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1.}$$

sodass wir die für das Ellipsoid entwickelten Formeln übernehmen können, wenn wir a^2 durch $-a^2$ und b^2 durch $-b^2$ ersetzen. Die Gleichungen der Isophote lauten dann:

$$x=\mp\frac{a^2}{c^2}\sqrt{\frac{c^4-(c^2-\varepsilon^2b^2)\,z^2}{b^2-a^2}}, \tag{2.}$$

$$y=\mp\frac{b^2}{c^2}\sqrt{\frac{c^4-(c^2-\varepsilon^2a^2)\,z^2}{a^2-b^2}}, \tag{3.}$$

$$\frac{x^2}{a^4}\left(\frac{c^2}{\varepsilon^2}-a^2\right)+\frac{y^2}{b^4}\left(\frac{c^2}{\varepsilon^2}-b^2\right)=1. \tag{4.}$$

Die Gleichungen der Böschungsfläche sind:

$$\xi = \mp \sqrt{\frac{c^4 - (c^2 - \varepsilon^2 b^2) z^2}{b^2 - a^2}} \cdot \frac{c^2 t_0 - a^2 z \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 + 1}}{c^2 z \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 + 1}}, \quad (5.)$$

$$\eta = \mp \sqrt{\frac{c^4 - (c^2 - \varepsilon^2 a^2) z^2}{a^2 - b^2}} \cdot \frac{c^2 t_0 - b^2 z \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 + 1}}{c^2 z \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 + 1}}, \quad (6.)$$

$$\zeta = z - \frac{t_0 \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + 1}}. \quad (7.)$$

Ihre Spur in der Ebene $\zeta = 0$ stellt sich dar durch:

$$\frac{\xi^2}{\frac{c^2}{\varepsilon^2} - a^2} + \frac{\eta^2}{\frac{c^2}{\varepsilon^2} - b^2} = 1. \quad (8.)$$

Die Projektionen der Gratlinie auf die Koordinatenebenen sind:

$$\left(\frac{\zeta \sqrt{c^2 - \varepsilon^2 b^2}}{c^2 - \varepsilon^2 a^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\xi \varepsilon^2 \sqrt{a^2 - b^2}}{c^2 - \varepsilon^2 a^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad (9.)$$

$$\left(\frac{\zeta \sqrt{c^2 - \varepsilon^2 a^2}}{c^2 - \varepsilon^2 b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta \varepsilon^2 \sqrt{a^2 - b^2}}{c^2 - \varepsilon^2 b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad (10.)$$

$$\left(\frac{\xi \sqrt{c^2 - \varepsilon^2 a^2}}{(a^2 - b^2)\varepsilon}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta \sqrt{c^2 - \varepsilon^2 b^2}}{(a^2 - b^2)\varepsilon}\right)^{\frac{2}{3}} = 1. \quad (11.)$$

Wir nehmen $a > b$ und unterscheiden bei der Diskussion 5 Fälle.

I. $\varepsilon < \frac{c}{a}$ oder $c^2 > \varepsilon^2 a^2$.

Die Projektion der Isophote auf die xy-Ebene ist eine Hyperbel.

Die Spur der Böschungsfläche in der Ebene $\zeta = 0$ ist eine Ellipse; bei variablem ε ergeben sich konfokale Ellipsen. Also gilt auch hier Satz A, ebenso Satz B.

Die Projektion der Gratlinie auf die $\xi\eta$-Ebene ist Evolute zu der durch (9.) bestimmten Ellipse. Die Projektion auf die $\xi\zeta$-Ebene ergibt die Evolute einer Hyperbel und die auf die $\eta\zeta$-Ebene die einer Ellipse.

II. $\varepsilon = \frac{c}{a}$ oder $c^2 = \varepsilon^2 a^2$.

Die Gleichungen der Isophote (2.) und (4.) gehen über in:

$$y = \frac{\mp b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

$$\frac{z^2 (a^2 - b^2)}{a^2 c^2} - \frac{x^2 (a^2 - b^2)}{a^4} = 1.$$

Jeder Zweig stellt also eine Hyperbel dar in einer Ebene, die in der Leitlinie des imaginären Schnittes des Hyperboloids mit der Ebene $z = 0$ auf dieser Ebene senkrecht steht.

Die Gleichungen der Böschungsfläche nehmen folgende Gestalt an:

$$\xi = \mp \sqrt{\frac{c^4 - (c^2 - \varepsilon^2 b^2) z^2}{a^2 - b^2}} \cdot \frac{c^2 t_0 - a^2 z \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 + 1}}{c^2 z \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 + 1}}, \quad (12.)$$

$$\eta = \mp \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{c^2 t_0 - b^2 z \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 + 1}}{z \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 + 1}}, \quad (13.)$$

$$\zeta = z - \frac{t_0 \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + 1}}. \quad (14.)$$

Eliminieren wir z und t_0, so ergibt sich schliesslich:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{(\eta \mp \sqrt{a^2 - b^2})^2}{a^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} = 0,$$

die Gleichung zweier Kreiskegel, deren Spitzen die Koordinaten

$$\xi = \zeta = 0, \quad \eta = \mp \sqrt{a^2 - b^2}$$

haben und deren Achsen der ζ-Achse parallel sind.

Die Böschungsfläche artet also für $\varepsilon = \frac{c}{a}$ in zwei Kreiskegel aus, bei denen der Tangens des Öffnungswinkels gleich dem Verhältnis der grösseren Achse in der xy-Ebene zu der der z-Achse entsprechenden Achse ist und deren Achsen Tangenten in den Nebenscheiteln der Fokalellipse sind.[1])

Dies Ergebnis wollen wir noch auf andere Weise aussprechen:

Schneiden wir das zweischalige Hyperboloid mit 2 Ebenen, die in den Leitlinien des imaginären Schnittes unserer Fläche mit der Ebene $z = 0$ auf dieser Ebene senkrecht steht, so ergeben sich 2 Hyperbeln, die auf den oben charakterisierten Kreiskegeln liegen.

III. $\frac{c}{a} < \varepsilon < \frac{c}{b}$ oder $\varepsilon^2 b^2 < c^2 < \varepsilon^2 a^2$.

Die Projektion der Isophote auf die xy-Ebene ist eine Hyperbel.

Die Spur der Böschungsfläche in der Ebene $\zeta = 0$ ist eine Hyperbel:

$$\frac{\eta^2}{\frac{c^2}{\varepsilon^2} - b^2} - \frac{\xi^2}{a^2 - \frac{c^2}{\varepsilon^2}} = 1. \qquad (15.)$$

Wenn ε variiert, so ergibt sich eine Schar konfokaler Hyperbeln.

Es gilt der zu Satz A entsprechende Satz. Ebenso Satz B. Die Projektionen der Gratlinie auf die Koordinatenebenen sind Evoluten von Hyperbeln.

IV. $\varepsilon \gtreqless \frac{c}{b}$ oder $c^2 \gtreqless b^2 \varepsilon^2$.

Die Böschungsfläche wird imaginär.

V. $\varepsilon = 0$.

Für $\varepsilon = 0$ zerfällt die Böschungsfläche in 2 Ebenen senkrecht zur z-Achse im Abstande $z = \pm c$.

1) Siehe Literaturangabe auf S. 63.

§ 14. Das elliptische Paraboloid.

Hat das Paraboloid die Gleichung:

$$x = \frac{y^2}{2a} + \frac{z^2}{2b}, \tag{1.}$$

so nehmen die partiellen Ableitungen folgende Werte an:

$$p = \frac{b}{z}; \quad q = -\frac{y}{a}\frac{b}{z};$$

$$r = -\frac{b^2}{z^3}; \quad s = \frac{y\,b^2}{a\,z^3}; \quad t = -\frac{2b^2 x}{a\,z^3}.$$

Es sei $a > b$.

Die Gleichung $p^2 + q^2 = \varepsilon^2$ geht über in:

$$\frac{b^2}{z^2} + \frac{b^2}{z^2} \cdot \frac{y^2}{a^2} = \varepsilon^2, \tag{2.}$$

oder:

$$\frac{z^2\,\varepsilon^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1; \tag{3.}$$

sie stellt die Projektion der Isophote auf die yz-Ebene dar.

Aus den Gleichungen (1.) und (3.) berechnen sich:

$$y = \frac{a}{b}\sqrt{z^2\,\varepsilon^2 - b^2},$$

$$x = \frac{1}{2\,b^2}\left[a\,z^2\,\varepsilon^2 - a\,b^2 + b\,z^2\right]. \tag{4.}$$

Die Gleichungen des Strahlensystems nehmen daher folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2\,b^2}\left[z^2(a\,\varepsilon^2 + b) - a\,b^2\right] - \frac{b\,t_0}{z\,\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2+1}}, \\ \eta &= \frac{a}{b}\sqrt{z^2\,\varepsilon^2 - b^2} + \frac{\sqrt{z^2\,\varepsilon^2 - b^2}\,t_0}{z\,\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2+1}}, \\ \zeta &= z - \frac{t_0\,\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+1}}. \end{aligned}\right\} \tag{5.}$$

ε = konst. ergibt die Böschungsflächen.

Die Spur in der Ebene $\zeta = 0$ ergibt, da

$$t_0 = \frac{z}{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon^2 + 1},$$

$$\xi = \frac{1}{2b^2}\left(z^2(a\varepsilon^2 + b) - ab^2 - \frac{b}{\varepsilon^2}\right),$$

$$\eta = \frac{a}{b}\sqrt{z^2\varepsilon^2 - b^2} + \frac{\sqrt{z^2\varepsilon^2 - b^2}}{\varepsilon^2}.$$

Die Elimination von z führt zu der Gleichung:

$$\eta^2\varepsilon^4 = (2\xi\varepsilon^2 + b)(a\varepsilon^2 + b),$$

oder

$$\eta^2 = 2\left(a + \frac{b}{\varepsilon^2}\right)\xi + 2\frac{b}{\varepsilon^2}\left(a + \frac{b}{\varepsilon^2}\right). \qquad (6.)$$

Der Parameter dieser Parabel ist:

$$a_1 = a + \frac{b}{\varepsilon^2};$$

für den der Parabel (4.) ergibt sich:

$$a_2 = \frac{a^2}{a + \frac{b}{\varepsilon^2}}.$$

Betrachten wir noch den Parameter a der Parabel, die als Schnitt des Paraboloids mit der xy-Ebene entsteht, so ist:

$$a_1 a_2 = a^2. \qquad (7.)$$

Wir haben also den Satz:

Der Parameter der Parabel, die als Schnitt des Paraboloids mit der xy-Ebene entsteht, ist mittlere Proportionale zu dem Parameter der Parabel, die man als Spur der Böschungsfläche in der $\xi\eta$-Ebene erhält und dem der Parabel, die die xy-Projektion der Isophote darstellt.

Für die Gleichungen der Gratlinie der Böschungsfläche berechnet sich:

$$\frac{p^2 r + 2 p q s + q^2 t}{r t - s^2} = z - \frac{z^3}{b^3} \varepsilon^2 (a \varepsilon^2 + b).$$

Die Gleichungen gehen daher über in:

$$\xi = \frac{3}{2} \frac{z^2}{b^2} (b + \varepsilon^2 a) - \frac{a \varepsilon^2 + 2 b}{2 \varepsilon^2},$$

$$\eta = - \frac{a \varepsilon^2 + b}{\varepsilon^2 b^3} (z^2 \varepsilon^2 - b^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$\zeta = \frac{z^3}{b^3} \varepsilon^2 (a \varepsilon^2 + b).$$

Die Projektion der Gratlinie auf die $\xi\eta$-Ebene ergibt die Gleichung einer semikubischen Parabel:

$$\eta^2 = \frac{8}{27} \frac{1}{a + \frac{b}{\varepsilon^2}} \left(\xi - a - \frac{b}{2 \varepsilon^2}\right)^3.$$

Wählt man als Gleichung des elliptischen Paraboloids

$$2 z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b},$$

so erhält man als Gleichungen der Gratlinie der Böschungsfläche:

$$\xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}} = [\varepsilon (a - b)]^{\frac{2}{3}},$$

$$\xi^2 \varepsilon^4 (a - b) = \frac{8}{27} \left(\zeta + \varepsilon^2 (a + b) - \frac{3}{2} \varepsilon^2 b\right)^3,$$

$$\eta^2 \varepsilon^4 (a - b) = - \frac{8}{27} \left(\zeta + \varepsilon^2 (a + b) - \frac{3}{2} \varepsilon^2 a\right)^3.$$

Die Projektion der Gratlinie auf die $\xi\eta$-Ebene ist eine Kardioide, die zu einem Kreise mit dem Radius $\varepsilon (a - b)$ gehört; bei variablem ε ergeben sich Kardioide, die zu

konzentrischen Kreisen gehören. Da sich ferner als Projektion der Isophote auf die xy-Ebene die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2\,\varepsilon^2}+\frac{y^2}{b^2\,\varepsilon^2}=1$$

ergibt, so ist der Radius jenes Kreises gleich der linearen Abplattung dieser Ellipse.

Am Schlusse meiner Arbeit erlaube ich mir, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. A. Gutzmer, für die freundliche Anregung zu diesen Untersuchungen und die liebenswürdige Förderung bei ihrer Ausführung meinen ergebensten Dank auszusprechen. Desgleichen möchte ich auch an dieser Stelle Herrn Professor Dr. E. Salkowski herzlich für die gütige Unterstützung und für die wertvollen Ratschläge danken, die er mir in so hohem Masse hat zu Teil werden lassen.

Lebenslauf.

Geboren wurde ich, Heinrich Wilhelm Rudolf Ackermann, am 25. August 1889 zu Adlershof bei Berlin als Sohn des Fabrikdirektors Heinrich Ackermann. Ich bin evangelisch-reformierten Bekenntnis und preussischer Staatsangehöriger. Im Jahre 1890 siedelten meine Eltern nach Magdeburg über. Dort besuchte ich die städtische Vorbereitungsschule und von Ostern 1899 das Realgymnasium, das ich Ostern 1909 mit dem Reifezeugnis verliess. Ich widmete mich dann dem Studium der Mathematik, Physik, Chemie und Philosophie, und zwar bis Michaelis 1910 in Heidelberg, den folgenden Winter in Berlin und seitdem in Halle. Die mündliche Doktorprüfung bestand ich am 25. November 1912.

Meine Lehrer waren die Herren Professoren und Dozenten:

in Heidelberg:

Koenigsberger, Lenard, Cantor, Uhlig, Oncken, Koch;

in Berlin:

Lehmann-Filhés, Blasius, Riehl, Diels, Münsterberg, Posner;

in Halle:

Gutzmer, Wangerin, Schmidt, Vorländer, Boeke, Fries, Jaensch, Martiny, Bauch, Stammler und Dorn.

Alle meine hochverehrten Lehrer mögen meines dauernden Dankes gewiss sein.